研究論文

圏論の視線から推論の動態モデルの挙動を理解する

Trying to understand the behavior of dynamic inference model from eyes of category theory

福　永　征　夫

Masao　Fukunaga

キーワード　：　相補性原理　ラティスの構造モデル　置換と組み換え　論理的分析的な演繹の推論　直観的構成的な帰納の推論

Keywords　:　principle of complementarity　model of lattice structure　permutation versus recombination　logical analytical inference of deduction　intuitive constructive inference of induction

As thought and behavior by human brain has been creating knowledge of mathematics, so the property of mathematics has been influencing thought and behavior by human brain. In this paper, the author will try to make clear the similarity and difference of the inference process by dynamic inference model of human brain with that of mathematical inference pr1ocess in1)cluding category theory, through cross-reference of both processes. Here the author will take up two kinds of logics concerning information processing, one is "logic of natural circulation and fusion"as a basis of thought and behavior by human brain, the other is "logic of mathematics" including recently rising meta-mathematical logic of category theory. We, humans living in the 21st century, are now undoubtedly in the blind alley of existence and evolution, facing global-scale problems. It is deeply desirable for us that the two kinds of logics will coexist and coevolve complementarily between competition and cooperation to solve global-scale problems effectively and efficiently.

１．圏論の視線から推論の動態モデルの挙動を理解する．

人間の脳による思考と行動が，数学という知識を生み，数学の特性が，人間の思考と行動に影響を与えてきた．この論稿では，脳の推論の動態モデルによる推論のプロセスと，圏論を含む数学の推論のプロセスを相互に参照して，その類似と差異を明らかにする試みをしたい．ここでは，推論に関する二種類の論理を取り上げる．一つは，人間の脳による思考と行動の基盤としての『自然の循環と融合の論理』であり，もう一つは，近ごろ発展しているカテゴリー理論というメタ数学の論理を含む『数学の論理』である．２１世紀に生きるわれわれ人間は，地球規模の難題群に直面しており，紛れもなく生存と進化の袋小路に陥っている．　われわれにとって,地球規模の難題群を効果的かつ効率的に解決するためには，この二種類の論理が相補的な競争と協調のはざまで共存し共進化することが強く求められる．

２．数学の推論では情報を置換し，脳の推論では情報を組み換える．

メタ数学としての圏論の推論プロセスでも，人の脳の推論プロセスでも，情報の変換がなされいる．ところが，脳の推論の動態モデルの挙動を圏論の図式[1)]に当てはめようとすると，即座にそれが不可能であることがわかる．その理由は，数学における情報の変換が，時間的な順序構造も空間的な配置構造も持たない，論理的な構造の間の情報の等価的な置換に当たるのに対し，脳の推論の動態モデルにおける情報の変換が，情報の時間的な順序構造と空間的な配置構造の間に生じる情報の相補的な組み換えに当たり，両者が推論プロセスとしての性質を異にす

[1)]西郷甲矢人・能美十三（2019）

るからである.

３．情報構造が発展するパターンは共通している

人間の脳の推論プロセスは，自らの生存環境で存在し生起する実在的な事物や事象の関係性を対象に，持続的な生存に有意な，下記の三つの情報構造を生み出す.

（１）高深度・領域的な異型の情報構造

（２）広域的・低深度な同型の情報構造

（３）異型性と同型性を融合した高次の抽象的・普遍的な情報構造

数学の推論プロセスは，自らのシステム環境で存在し生起する数理的・概念的な事物や事象の関係性を対象に，矛盾のない必然的な論理を貫くのに有意な，上記の三つの情報構造を生み出す.

４．１９世紀初めのボルツァーノが時間・空間のア・プリオーリな直観から数学を切り離した.

近藤和敬（2013）の論述によれば，純粋直観という人間が有するア・プリオーリな直観としてカントが示した，時間および空間の感覚から数学の推論プロセスを切り離したのは，１９世紀初めのベルナルト・ボルツァーノであった．近藤和敬（2013）によれば「ボルツァーノが示したのは，算術の命題の証明および，その証明を構成する定義および公理において必要なのは，直観ではなく，論理的な構造の把握，すなわち代入可能性（置換可能性）の把握にほかならない．これは明らかに，時間的な順序構造も不可欠とはしないし，空間的な配置構造も必要としていない」.

５．“直観的構成的な帰納の推論”とは，人間の脳の推論プロセスにおける帰納の推論を意味するものだと言えるだろう.

近藤和敬（2013）によれば，「カントが適切に述べたように，経験は知覚（直観）と概念の双方の産物である．“経験の根底に存するものは，私の意識している直観すなわち知覚であり，これは感官だけに属する．しかし経験が成立するためには，更に判断作用を必要とする．これは悟性だけに属する”」

カントがここで“私の意識している直観”と述べた直観も時間および空間からなるが，ア・プリオリな，意識していない純粋直観ではなく，ア・ポステリオーリな直観をいうことに留意しなければならない．また，カントのいう悟性とは，感性に与えられる所与を認識へと構成する概念能力・判断能力のことであるが，概念の構成能力は，特定の命題や具体的な命題から一般の命題や抽象的な命題を推論する帰納の推論と密接に関係している.

ア・プリオーリな時間および空間の感覚から数学の推論プロセスを切り離して成立したのが“論理的分析的な演繹の推論”であるが，これに対して，“直観的構成的な帰納の推論”とは，カントのいう，時間と空間からなるア・ポステリオーリな知覚（直観）と概念の双方の産物である“経験”を基礎にする，構成的な帰納の推論を意味するものだと言えるだろう．つまり，“直観的構成的な帰納の推論”とは，時間の情報と空間の情報からなる人間の脳の推論プロセスにおける帰納の推論を意味するものだと言えるだろう.

６．ヒルベルトの公理主義的方法論に対して直観主義者のポアンカレやブローウェルが批判を向けた.

“論理的分析的な演繹の推論”に立脚する公理主義者のヒルベルト[2)]は，１８９９年の記念論文“幾何学の基礎”で公理主義的方法論を示したが，“直観的構成的な帰納の推論”に立脚する直観主義者のポアンカレやブローウェルは，この公理主義的方法論に対して批判を向けた．Ｃ・リード（1972）によれば，「ポアンカレは“一連の与えられた命題について，彼（ヒルベルト）はそれらがすべて第一の命題から論理的に帰結され得るものであることを見出す．この第一の命題が何に基礎を置くのか，またそれがどのような心理的要因を持つのかについての問題に，彼は立ち入ろうとはしない……公理は当然のこととして述べられている．それらがどういう根拠によるのかについて，われわれは何も知らされない．したがって，命題Ａを公理として述べようと，…命題Ｃを公理にしようと，どちらでもよいのである．”と述べている」．Ｃ・リード（1972）によれば，「ブローウェルによれば，ある所与の性質を持ったものが存在するという命題は，少なくとも原理的に，そのようなものを見出す方法，または構成する方法が示されることを意味し，またそのような時に限って証明されるのであった」.

７．ヒルベルトは，１９００年の講演で，６０年も先の数学の諸問題を見通すかのように，数学の将来について述べている.

2) 遠山啓（2012）

ロバート・ラングランズが，１９６０年代の末に“直観的構成的な帰納の推論”に立脚して，ラングランズ・プログラムを創始する６０年以上も前に，ヒルベルトは，１９００年にパリで開かれた第二回国際数学者会議での講演で，数学の先行きの諸問題を見通すかのように，数学の将来について述べている．C・リード（1972）によれば「われわれに問われていることは，果して，数学が将来他の科学の分野のように別々の領域に分かたれ，それぞれの分域の代表者たちが互いに他を理解することがほとんどなく，またそれらの間の連なりがますます薄れることになるような宿命を持っているかどうかということである．私は，数学がこのような宿命を負っているとは信じないし，またそれを欲しもしない．私の考えでは，数学は分つことができない一つの全体であり，そのヴァイタリティーがその各部分の間の連携に依存しているような一個の有機体である．実際，多岐にわたる数学的知識の諸分野の存在にもかかわらず，われわれはそれらの各分野で用いられる論理的手法の間に見られる類似性について，また数学全体にわたって諸々のアイディア相互間の関連そして相異なる諸分野間の多数のアナロジーの存在について明確な意識を持っている．そしてまた数学の理論が発展するにつれ，理論の構築はより大いなる調和を持ち，より統一的な形で進行するということ，そしてさらに，それまでは別々であった分野の間の関係が思いがけない形で明るみに出されるということも確かである．こうして，数学が拡大するのにつれて，実は，その有機的特質は失われるのではなく，かえって，より明瞭な姿をとるようになるのである」．「しかし，数学的知識が拡大していくに従って，遂には，一人の探求者にとってこの知識をそのすべての分野にわたって包括することが不可能になるのではないだろうかという疑問が起こる．これに答えるために，数学はその深い特質により，そのすべての真実の発展は同時により鋭い道具，より簡潔な方法の発明をもたらし，それによってそれ以前の諸定理はより理解され易いものとなり，以前の，より複雑な理論展開が不用になるという事実を指摘しよう」．

ヒルベルトの見通しは，前記の３で触れた，情報構造が発展するパターンに関係しているし，２３で言及する圏論と層の出現に関連している．

８．２１世紀に生きるわれわれは，深刻な生存と進化の袋小路に陥っている．

２１世紀に生きるわれわれは，人間の過去の営みが招いた（１）地球環境問題（２）資源・エネルギーの枯渇（３）貧富の差の拡大（４）人口の爆発（５）感染症や慢性的な難病の発生（６）災害や事故の巨大化（７）民族・宗教・文化・政治・経済をめぐる対立と紛争の激化（８）凶悪な犯罪やいじめ・虐待行為の多発，等の地球規模の難題群の発生に直面し，今や紛れもなく，深刻な生存と進化の袋小路に陥っている．

９．われわれ人間は演繹の推論と帰納の推論という相補的な二つのベクトルを融合させてこなかった．

これらの地球規模の難題群の発生は，根源的には，われわれ人間が近代以降の主知主義的な伝統により，演繹の推論に対する過度の傾斜と偏向を続けて，主として領域的で高深度の知識と行動を追求し，主として自らの足元の部分の最適化を優先して遂行したという，狭隘な営みの累積的な結果が招いた不幸な結末であると言えるだろう．つまり，われわれが，近現代史の長い期間を通じて，演繹の推論と帰納の推論という相補的な二つのベクトルを循環させて融合し，前者による「人間や自己」という部分域の最適化と，後者による「生態系や他者」を含めた全体域の最適化とを循環し融合して調和させることのできるような高深度・広域・高次の知識と行動を実現することができなかった． その結果，自然の淘汰圧に対する自由度を発揮して中立性を確保することができなくなり，われわれ人間の持続可能性に破綻を招くまでに至ったということだろう．

地球規模の難題群の発生に対して，われわれが主体的かつ能動的に対処して持続可能性を確保するためには，われわれの営みのパラダイムを，トレード・オフの論理から，『自然の循環と融合の論理』によりよく適合するものへと転換して行かなければならない．

１０．ボーアの「相補性原理」によって「時間の情報」と「空間の情報」の存在が再確認された．

ゲーザ・サモシ（1997）によれば，「１９２７年，ボーアは量子力学が人間の脳に与えることができる情報の型を定義することができた．ボーアによる有名な“相補性原理”が言っているのは，われわれにできるのは微視的な世界を空間と時間という心の枠組みの中で見たり，それが因果的に決定されていると見たりすることであって，その両方を見ることはできないということである．時空による記述や，因果的な記述はもともと相補的であって，いちどき

にはどちらか一方を使えるだけなのである」．「相補性原理の別の表現は，物質を粒子と見たり，波と見たりできるが，両方の性質を同時に観測することはできないということである．これは人間の脳にある高度に洗練された情報処理システムに関わっているし、脳が二つの異なるモデルを手元に持っているということである」．

『自然の循環と融合の論理』では，時間の情報（空間の情報）が原因となって空間の情報（時間の情報）が結果となり，その結果が次の原因となるような循環の因果関係が成立している．人間が生み出した数学や論理学の論理では，今日に至るまで，主として演繹の推論につながる時間の情報と，主として帰納の推論につながる空間の情報という，情報の枠組みの相補的な二つのベクトルを逆理（パラドックス）とみなして，自らは対象とせずに，その取り扱いを専ら哲学的な推論に委ねてきた．

１１．『ラティスの構造モデル』が表す『自然の循環と融合の論理』では相補的な二つのベクトルが循環して融合する.

（1）自然や生命・社会の系では『ラティスの構造モデル』が表す『自然の循環と融合の論理』が作用している．『ラティスの構造モデル』(Model of Lattice Structure)の詳細は，福永征夫（2019）が記述するところに譲るが．このモデルは，自然や脳を含む生命・社会の系の保存(XorY)と変革(XandY)の二つの相補的なベクトルの相互作用を次の四本の計算式で表現する構成的な動態モデルである．

（2）自然や生命・社会の系において，相互に作用する二つの部分域をP_2，P_1とし，それぞれが保持するエネルギーの準位の相対的な比率を ℓP_2，ℓP_1 として，$\ell P_2 = 1$，$1 > \ell P_1 > 0$ とする．

$$\ell P_2 / \ell P_1 > (\ell P_2 + \ell P_1) / \ell P_2 \qquad ①$$
$$\ell P_2 / \ell P_1 < (\ell P_2 + \ell P_1) / \ell P_2 \qquad ②$$
$$\ell P_2 / \ell P_1 = (\ell P_2 + \ell P_1) / \ell P_2 \qquad ③$$
$$(FL + CL)_2 = FL \qquad ④$$

ＦＬは,系における，二つのベクトルの融合という臨界点のエネルギー準位を意味する．ここでエネルギー準位とは,位置エネルギーと運動エネルギーを合わせた全エネルギーの準位をいう．ＣＬは相互作用のために,P_2からP_1へ移動するエネルギ－の準位をいう．

（3）自然や脳を含む生命・社会の系では，①安定度を増大させる保存の方向性，すなわち，内部エネルギーを減少させる方向性と，②自由度を増大させる変革の方向性，すなわち，エントロピーを増加させる方向性，の相補的な二つのベクトルが交互に作用し循環して融合という臨界性を実現し，システムの恒常性　（ホメオスタシス）や定常性が維持されているものと考えられる．

（4）前者は自然や脳を含む生命・社会の系の部分域同士が，互いに斥け合う(XorY)という両側的で排他的な作用を志向して，保存のベクトルとして働き，後者は自然や生命・社会の系の部分域同士が，互いに引き合う(XandY)という両側的で包括的な作用を志向して，変革のベクトルとして働く．

１２．デカルトの要素還元主義の限界を乗り越える

（1）ルネ・デカルトは，難問の一つ一つを，できるだけ多くの，しかも問題をよりよく解くために必要なだけの小部分に分割することを説いて，いわゆる要素還元主義という領域学の方法論を確立したが，分割した部分を全体として総合する広域学の方法を見出すには至らなかった．

（2）(XorY)はタテ方向の領域学の形成につながる「分ける・分かれる」ベクトルを意味し，(XandY)はヨコ方向の広域学の形成につながる「まとめる・まとまる」ベクトルを意味する．

（3）要素還元主義に基づく領域学の認識に偏る知識と行動は，自然の系，人間の脳を含む生命の系，社会の系の相互作用における(XandY)のベクトルを反映していないので,自己完結的ではない．それらが長く蓄積すると，われわれが自然の淘汰圧を受けた場合に,思考と行動の自由度を発揮することができなくなってしまう．そうなると，われわれはその淘汰圧に対する中立性を確保できなくなり，結果的に，われわれの持続可能性に破滅的な破綻をもたらすことが危惧されるようになる.このことは，灌漑の要素技術に依存していたバビロニアの古代文明の滅亡（青柳正規 2018）や，後代におけるイースター島の森林文明の崩壊などの歴史に照らして明らかであろう．

１３．脳科学の研究から人間の脳の知見を探る.

武田暁（2004）は，次のように述べている．

（1）「（物理学が）物理現象を観測する場合に我々は適当な時空座標系を設定し，その物理現象の時間変化や空間的な広がりを記述する．我々がそのような座標系を心に描くことができるのは，脳内でも何らかの形で時空座標系が設定され，それを用いて

物体の位置と位置変化（速度）や物体間の空間配置関係等を認知しているいるためと思われる」．

（２）「感覚刺激を心理的に認知したり，それに応答して行動する場合の脳機能の時間スケールは１００ミリ秒から数秒程度の時間である．いろいろな感覚情報処理に際して人間は１００ミリ秒程度以下の時間差で起こった複数の事象は同時に起こった事象として知覚する．複数の事象を区別して認知できるための事象間の時間差の臨界値は，知覚の種類や事象の性格によって多少異なるが，１００ミリ秒程度の時間差が事象を区別できる臨界値と考えてよい．ある事象を認知する心理的一瞬とは、１００ミリ秒程度の時間にわたるニューロン集団の活動の総体に支えられていることになる」．

（３）「物体の網膜上での像の位置・傾き・大きさ等が異なるにもかかわらず同一物体として認知できる能力は，動物が適応的行動を取るために欠かせない能力であり，日常的にこのような能力を用いている．網膜上の物体像の位置・傾き・大きさの変化はそれぞれ座標系の並進・回転・スケール変換に相当するので，動物はこれら座標変換に対して不変な形で対象を認知していることになる」．

（４）「時空間情報はいろいろな座標系を用いて脳内で表現されている．座標系は大別して自己中心（egocentric）座標系と環境中心（allocentric）座標系とに分けられる．前者には，頭や体軸の向きに固定した座標系，視線の向きに固定した座標系等の異なる座標系がある．後者は外部環境の中の特定の物体に固定した座標系であり，どの物体を座標中心に選ぶか等によっていろいろと異なる座標系が考えられる」．

（５）「覚醒中や夢を見ているレム睡眠中には，海馬の局所電位にθ波と呼ばれる４～８ヘルツの低周波振動が見られ，この遅い振動に速く振動するβ，γ振動が重ね合わさっている．同様に大脳皮質の脳波や局所電位にもθ，α波領域の遅い振動が見られ，この振動に速いβ，γ振動が重なっていることも次第に明らかにされてきている」．

１４．人間は『自然の循環と融合の論理』によって「３軸認知場」に「知」・「情」・「意」の ストーリー構造を自己組織化し記憶する.

人間は,現前の[今][ここ]において発生する情報を，Ｘ軸=「事実」の系と「目的」の系の空間軸，Ｙ軸=時間軸，　Ｚ軸=「価値」の系の空間軸，からなる「３軸認知場」という自らの情報処理の場において，互いに相補的な「時間の情報」（XorY）と「空間の情報」（XandY）を交互に連接して，起(begin)・承(succeed)・転(change)・結(conclude)のステップからなる時空間の情報のストーリー構造を自己組織化し記憶して，知・情・意の各系を表象し作動させて，生存と進化のための機能を遂行する．また，人間は，[今][ここ]における知・情・意の各系の間の両側的な相互作用によって，意識を生み出している.

１５．「３軸認知場」には脳の時空間の構造と機能が組み込まれている.

（１）「３軸認知場」はＸ軸とＹ軸の平行移動を有しているので，事物や事象の情報の並進変換が確保されている．また，四つの式のベースには螺旋曲線があるので，原理的にはミクロとマクロの回転変換を含意している．さらに，ミクロとマクロの階層構造を有するので，スケール変換が確保されている.

（２）「３軸認知場」では「時間の情報(XorY)」をＹ軸に平行する通時的な空間で表わし，「空間の情報(XandY)」をＸ軸に平行する共時的な時間で表わして，互いに座標の変換を繰り返している.

（３）「 時間の情報(XorY)」は自他の部分域を最適化するベクトル，すなわち自己中心座標系として機能し，「空間の情報(XandY)」は自他の部分域からなる全体域を最適化するベクトル，すなわち環境中心座標系として機能する.

（４）脳の推論プロセスでは，座標変換という情報の組み換えによって情報を変換しているのに対し，数学の推論プロセスでは，等価的な情報の置換（代入），とりわけ圏論では，対称変換という置換によって情報を変換している.

１６．両側的な作用とはフィード・フォワードの作用とフィード・バックの作用の間の可逆的な作用である.

『自然の循環と融合の論理』の重要なポイントのひとつである両側的な作用とは，過去から現在に向かうフィード・フォワードの作用と現在から過去に向かうフィード・バックの作用の間の可逆的な作用である．この両側的な作用によって，(XorY)では，情報Ｘと情報Ｙが自他の差異を同じように理解する同型の状態に達し，(XandY)では，情報Ｘと情報Ｙが自他の類似を同じように理解する同型の状態に達する.

１７．演繹のプロセスと帰納のプロセスは相互に循環し融合して高深度・広域・高次の知識と行動を実現する．

（１）「３軸認知場」において，演繹の推論とは，「X に Y が継起し(XorY)，Y に X’が同期し(YandX’)， X’に Y’が継起する(X’orY’)」で表される「時間の情報」と「空間の情報」からなる類比の推論である．演繹の推論は，一般の命題や抽象的な命題から特定の命題や具体的な命題を推論する，論理的で分析的な推論であり，領域的で高深度の知識や行動を実現する．

（２）「３軸認知場」において，帰納の推論とは，「X に Y が同期し(XandY)，Y に X’が継起し(YorX’)， X’に Y’が同期する(X’andY’)」で表される「空間の情報」と「時間の情報」からなる類比の推論である．帰納の推論は，特定の命題や具体的な命題から一般の命題や抽象的な命題を推論する，直観的で構成的な推論であり，広域的で低深度の知識や行動を実現する．

（３）上記の（１）と（２）において，(XorY)，(X’orY’)（YorX’)などの「時間の情報」は，“前者と後者が両側的に他との差異を見る”ように作用し，（YandX’)（X’andY’)（XandY）などの「空間の情報」は，“前者と後者が両側的に他との類似を見る”ように作用する．

（４）演繹のプロセスと帰納のプロセスは，相互に循環し融合して，高深度・広域・高次のより抽象的でより普遍的な知識と行動を実現する．演繹の推論は自己中心座標系に，帰納の推論は環境中心座標系に，それぞれ属しており，互いに座標変換することができる．人間の先史考古学や古代史，人間の幼児期における推論の発展にその例が推測されるように，可換な両方の推論過程の座標変換が知識の深化と広域化，および高次化の鍵を握っているものと考えられる．

（５）『ラティスの構造モデル』から導出されるように，「３軸認知場」の演繹の推論において，「時間の情報」(XorY)は，速い振動の高い周波数の波形で表象され，「空間の情報」(YandX’)は，遅い振動の低い周波数の波形で表象されるものと考えられる．また，「３軸認知場」の帰納の推論においては，「空間の情報」(YandX)は，速い振動の高い周波数の波形で表象され，「時間の情報」(YandX’)は，遅い振動の低い周波数の波形で表象されるものと考えられる．

１８．ファインマンがバビロニアの直観的構成的な帰納の推論とギリシアの論理的分析的な演繹の推論の違いを語っている．

バビロニアとギリシアの推論の形態と性質について，R．P．ファインマン（2001）は次のように述べている．

（１）「全体を導き出すのにここから出発すべしといった類の特別の命題はあるでしょうか？ バビロニアの学校では，数学を学ぶのに，生徒は数多くの例題を解かされたものです．例題を解いているうちに何かを悟るだろうというわけで，一般的な規則を感得するまでそれを続けるのです．彼らは幾何学に精通し，円の性質のあれこれ，ピタゴラスの定理，矩形や三角形の面積を求める公式，何でも知りつくしていたもので，そのうえに，推論の方法もいくらかわきまえておりましたから，一つの命題から別の命題を導くこともできなかったわけではありません」．

（２）「そこにユークリッドが現われてギリシア式の考え方を出した．彼は，幾何学の諸定理を順序よく並べると，それらは少数の直感的とりわけ単純な公理から次々に導き出されるということを発見したのです．すなわちバビロニア数学においては，人はいろんな定理を知りつくし，諸定理の間の関係も数多く知っていましたけれども，全体が少数の公理から導かれてしまうとはついぞ気づかなかったのであります」．

（３）「現代の数学は公理と証明に専心し，公理として何を許し，何を許さないかの約束をきっちり守って，その枠内で議論をするが，どれが最良の公理であるか決めてかかるのは，全体を見通すのに必ずしも便利でない．物理はバビロニア式にするべきであって，ユークリッド式あるいはギリシア式にするものではありません」．

（４）「力が太陽に向かっているという命題と，等しい時間内には等しい面積が掃過されるという命題とでは，どちらが重要だろうか？ どちらがより基本的であるか，公理としてはどちらがよいか？ たくさんの惑星を相手にする場合には，力についての命題を用いればこの系を扱うことができる．一方，面積速度一定の原理は，多数の粒子，例えば金星，土星および太陽，それに他の星どもも入れて考えます」．

１９．帰納的プロセスはあらゆる実験科学の土台だが，厳密な数学では 永遠に禁じられている．

トビアス・ダンツィク（2007）によれば，

（1）「どんな知識体系においても，一連の前提を確立するのは容易ではない．それには鋭い解析的判断だけでなく，優れた技術も必要だ．というのも，矛盾をなくすのに加えて，全ての前提が互いに独立しており，体系全体が網羅的，すなわち対象とする問題を完全にカバーすることが求められるからだ」

（2）「われわれが仮定を調べてそれに矛盾のないことが分かったとしよう．このとき，われわれの結論は論理的に完全であると言われる．しかしこの結論が観測事実と一致しなかった場合は，われわれが立てた前提がそれを適用させた具体的問題にそぐわなかったということになる」．

（3）「このようなプロセスは，“演繹的”と呼ばれる．これは“定義”や“仮定”や“公理”といった形を持つ極めて一般的な性質からスタートし，そこから論理の規準を用いて，特定の例について起こる事柄や状況に関する命題を導くというものだ」．

（4）「科学研究においては，全く異なる性質を持つもう一つの方法，“帰納法”が用いられている．これは通例，特定から一般を導くことと説明される．つまり観測や実験の結果だ．ある事柄の集合が持つ性質を発見するには，可能な限り似た状況下でできるだけ数多く観測や検証を繰り返さなければならない．すると観測や実験を通して，あるはっきりした傾向が姿を現して，あるはっきりした傾向が姿を表してくるかもしれない．そこでこの傾向が，その集合の性質として認められることになる」．

（5）「この帰納的プロセスはあらゆる実験科学の土台だが，厳密な数学では“永遠に禁じられている”．数学の命題をそのように証明するのは，ばかげていると見なされるだけでなく，確立した真実を立証する方法としても受け入れられない．というのも，“数学的命題を証明するには，実例に基づく証拠がどれだけあっても不十分だが，ある命題の間違いを証明するにはたった一つの実例で十分だからだ”．数学的命題は，論理的矛盾を導かない場合にだけ真であり，そうでなければ偽である．“演繹法は矛盾の原理のみに基づいているのである”」．

２０．数学の二重性：クーラントとロビンスは「数学の基本要素は，論理と直観，解析と構成，一般性と個別性という対抗する力の相互作用とそれらの合成へのもがき」だと指摘する．

　R・クーラント／H・ロビンス（1966）によれば，

（1）「人間精神の表現としての数学の基本要素は，論理と直観，解析と構成，一般性と個別性である．これらの対抗する力の相互作用とそれらの合成へのもがきこそ数理科学の生命，有用性，および並びない価値を生み出すものである」．

（2）「公理論的見地は次のように述べることができる．一つの推論系で定理を証明することは，定理がいくつかの前もって証明された論理的結論であることを示すことである．これらの命題自身はその前に証明されていなければならないものである．このことが続いてゆく．数学的証明の過程はその結果，もしもさかのぼる際にある点でとどまることが許されなければ，無限に逆行するという不可能な作業になってしまう」．

（3）「そこで公準または公理と呼ばれる，真として受け入れられ，それらに対しては証明は必要とされないいくつかの陳述が必要となる．これらのものからわれわれは，純粋に論理的な議論によりすべての他の定理を推論しようと試みることができる」．

（4）「公理として選ばれる命題の選び方には非常な任意性がある．しかし公準が簡単でまた割合少数でなければ，公理的方法によって得るところは少ない．その上，公準はそれらから推論されるどの二つの定理も相互に矛盾していることはあり得ないという意味で無矛盾であり，またその体系のすべての定理がそれらの公準から推論されるという意味で完備でなければならない．経済上の理由で，どの一つの公準も他の公準からの論理的な結果ではないという意味で，公準は独立であることが望ましい」．

（5）「公理の集合の無矛盾性と完備性の問題は多くの論争の原因であった．人間の知識の究極的な根元に関する哲学的な確信の違いが，（公理主義と直観主義という）数学の基礎に対する明らかに対立した考えの原因となってきている」．

（6）「公理主義者たちは，数学的な対象に直観的な現実性を持たせようとしない．彼等の関心はただ公準を基礎とした推論という形式論理的手続のみにある．この態度は直観主義に比べて明確な長所をもっている．というのは理論と応用に必要なあらゆる行動の自由を数学に許すからである」．

（7）「しかしそれは，今や人間の理性の任意の創造物として現われている公理群が，決して矛盾に導くことがないことを証明する必要性を公理主義者に課している．少なくとも算術と代数の公理と数連続体の概念に関して，そのような無矛盾性の証明を発見するために過去２０年間に大きな努力がなされてきたが．成功にはまだほど遠い」．

（8）「実際，最近の結果は無矛盾と完備性に関する証明が，厳密に閉じた概念体系の中では不可能で

あるという意味で，このような努力が完全には成功し得ないことを指摘している[3]」．

（9）「十分に目につくことは，基礎に関するすべてのこれらの議論は，それ自身徹底的に構成的な方法によって，また直観的な絵模様に指導されて進められているということである」．

（１０）「哲学的な考えと基礎についての関心とをまったく離れても，数学的主題の公理論的な取り上げ方は，いろいろな事実の間の相互関係の網の目を解きほぐし，また構造の本質的な論理的骨組を示すための自然な方法である．時には，概念の直観的意味についてよりもむしろ形式的な構造についてこのように集中して考える方が，もっと直観的な行き方では見落されるかもしれないような一般化と応用を見つけるのをより容易にするということが起る」．

（１１）「しかし重要な発見とか啓発的な洞察とかいうものは，もっぱら公理的な手続によるのではめったに得られない．直観によって導かれる構成的な考え方は，数学の原動力の真の源である．公理形式は理想的なものであるとは言え，公理論が数学の本質を構成すると信じるのは危険な誤った考えである．数学者たちの構成的な直観は数学に非演繹的な非合理な要素をもたらし，数学を音楽や美術に匹敵するものにする」．

２１．ヒルベルトの公理主義の論理的分析的な演繹の推論によって，分岐して発展した数学は高深度・領域的な様々の異型の情報構造を生み出したが，ラングランズとヴェイユの洞察に基づく直観的構成的な帰納の推論によって，広域的・低深度な同型の情報構造にまとめられた．以下はエドワード・フレンケル（2015）の論述から引用する．

２１．１　数学の領域に共通して現れる不思議なパターンが異なる領域間に深いつながりがあることを明らかにする．

（1）「１９６０年代の末にロバート・ラングランズが創始したラングランズ・プログラムは，数学の様々な領域に共通して現れる不思議なパターンを浮かび上がらせ，それに焦点を合わせることにより，異なる領域間に予想もしなかった深いつながりがあることを明らかにしてきている」．

（2）「ラングランズ・プログラムの鍵となるのは，見た目を変えない操作を意味する対称変換という概念である．正方形の机の対称変換の集合という，シンプルなもの――たった四つの回転の集まり{90° 180° 270° 360° }――が，いくつもの内部構造を持っている．その内部構造は，この集合のメンバーが相互作用をするときのルールだ．第一のルールは，任意の二つの対称変換を合成できるということ．つまり，ある回転操作に続いて，もう一つの回転操作を施せるということ．第二のルールは，恒等変換という，特別な対称変換が存在すること．第三のルールは，任意の対称変換Ｓに対して，その合成が恒等変換になるような対称変換Ｓ’が存在するということ．このＳ’は，もとの対称変換Ｓの逆元である．対称変換の合成が満たすべき，第四のルールは，結合法則という重要な性質があること．三つの対称変換Ｓ，Ｓ’，Ｓ”が与えられたとして，それらを（Ｓ○Ｓ’）○Ｓ”とＳ○（Ｓ’○Ｓ”）という異なる二つの方法で合成する．これら二つは同じ結果を与える．これら四つの構造を持つ回転という対称変換の集合は，数学者が対称群と呼ぶものの一例になっている」．

２１．２　ラングランズ・プログラムでは数の研究――数論――の領域に現れるガロア群が重要である

（1）「ラングランズ・プログラムにとって重要な群は，数の研究――数論――の領域に現れる群である．日常の生活では，自然数や整数よりも少しだけ一般的な数である分数，すなわち有理数にも出会う．しかし数の中には，ｍ／ｎの形には表せない√２のような無理数もある．そこで有理数に無理数√２を加えた新しい数の体系としてｍ／ｎ＋ｐ／ｑ×√２を考えると，この新しい数の体系では，有理数と無理数の数同士の掛け算と足し算ができるようになる．つまり，ｍ／ｎ＋ｐ／ｑ×√２という形をした数のすべてを含んでいなければならない．この形をした数すべてを集めたものの内部で，通常の演算操作――足し算，引き算，掛け算，割り算――ができ，その結果として得られる数はやはり同じ形をしているという意味において，この体系は「自己充足」している．このような数の体系のことを数体という．新しい数の体系には，有理数にはない，ある特徴がある．実はこの数の体系は，いくつかの「対称変換」を持っているのだ．ここでいう対称変換とは，一つの数を，別の数に「移行させる」ルールなのだ．そのルールは，足し算，引き算，掛け算，割り算という，普通の演算操作と両立しなければならない．この新しい数の体系は，恒等変換という，すべての数

[3] ゲーデルの不完全性定理（１９３１）

を，それ自身に「移行させる」ルールを持つ．それは，丸い机を○度だけ回転させると，机のすべての点が自分自身に移行するようなものだ．この数の体系には，恒等変換のように自明でない対称変換もある．√２は，方程式X_2=2の解だが，この方程式には解が二つあって，もう一つは −√２だ．実は，この新しい数の体系を作ったときに，有理数の体系にこれら二つの数を添加しているのだ．そして，これら二つの解を切り替えることが，この数の体系の一つの対称変換になるのだ．この交換を施しても，有理数は元のままで変化しない」．

（2）「体という言葉は，その数の体系が，足し算，引き算，掛け算，割り算の操作のもとで，閉じている，つまり，これらの演算をした結果も，やはり同じ数の体系に含まれているということを意味している．√２を添加して得られる数体と同じく，一般的な数体の場合にも，これらの基本的な演算操作と両立する対称変換がある．この対称変換は，引き続いて行って変換を合成できる幾何学的な対象に対称変換を施すのと同じことである．そうであれば，数体の対称変換が群になっているとしても驚くには当たらない．この群のことを，数学者のガロアを称えて，数体のガロア群と呼ぶ」．

２１．３　数論と調和解析という領域のそれぞれに重要な構造があり，それらの構造間につながりがある

（1）「１９６７年，ラングランズはガロア群の理論と，調和解析と呼ばれる数学の分野とをつなぐ革命的な洞察を得た．ラングランズは，素数を法とする方程式の解の個数のような数論の難しい問題を，調和解析，具体的には，保形関数の研究の手法を使って解くことができるだろうと予想した．ラングラランズ・プログラムは，数論と調和解析という領域のそれぞれに重要な構造があり，それらの構造間につながりがあることを示唆している」．

（2）「ある領域のパターンについて何か情報が得られれば，他の領域に見られるパターンの意味を探るヒントになる．数学者たちは，数論，調和解析，幾何学，表現論，数理物理学など様々な領域で，相当異質な対象を調べているにもかかわらず，よく似た現象を見る．そういう現象を手がかりとして，一見バラバラに思える現象を，壮大なジグソーパズルのように組み合わせているのだ」．

２１．４　ヴェイユの枠組みでは“数論”と “リーマン面”の間に“有限体の曲線”が位置付けられている．

（1）「アンドレ・ヴェイユが示してくれたのは，数論と幾何学とのつながりを理解するための枠組みだった．一方には数論の対象がある．有理数をはじめとする数体――たとえば，有理数に√２を添加することによって得られる数体――や，それらの対称性を記述するガロア群などがそれだ．他方には，いわゆるリーマン面がある．リーマン面には，球面，ドーナッツのような形をしたトーラス，デーニッツシュペストリーのような形をしたリーマン面がある．そして，枠組みの左のコラムの“数論”と右のコラムの“リーマン面”の間の真ん中のコラムに“有限体の曲線”が位置付けられている」．

（2）「一見すると，数論とリーマン面との間に共通するものがあるようには思えない．ところが，両者の間には，いくつものアナロジーが成り立つのである．鍵になるのは，これら両者の間に，もう一つ別の数学的対象が存在することだ．リーマン面は代数方程式で表せるのだ．一例として，次の三次方程式 y_2＋y＝x_3−x_2を考えよう．このような方程式の解を考えるときには，その解がどんな数の体系に属しているかを指定することが重要だ．どんな体系を選ぶかによって，異なる数学理論が出てくる．この方程式の解を複素数の中に探した場合の理論から出てくるのが，リーマン面なのだ」．

（3）「前の**２１．２**（1）では，方程式 x_2=2の二つの解を，√２および −√２と表記し，それらを有理数に添加した．今度は，方程式 x_2=2の代わりに，方程式 x_2= −１を考え，二つの解を，√−１および −√−１と表記し，有理数に添加してみよう．前の場合の√２は有理数ではないけれども実数であるから，それを実数に添加しても，実数の世界から離れることにはならない．だが，√−１を添加して得た，この新しい体系に属する数は，複素数と呼ばれており，ｒ＋s√−1のように書くことができる．ｒとｓは任意の実数であってもよいことにして，複素数の定義を拡張する．実数は，幾何学的には，直線状に並ぶ点として表される．同様に複素数は，平面上に並ぶ点として表される．つまり複素数ｒ＋s√−１を，ｒとｓを座標とする平面状の一点として表すのである」．

（4）「方程式 y_2＋y＝x_3−x_2の解 x，ｙを，複素数の範囲で探すと，驚くべきことに，そのような解全体の集合は，トーラス上の点の集合と同じになることがわかるのだ．トーラス上のどの点に対しても

，この三次方程式の解になる複素数x，yの組を，一つだけ割り当てることができるし，逆に，この三次方程式の解となる複素数が一つ得られれば，トーラス上の一点が決まるのだ」．

２１．５　方程式$y_2+y=x_3-x_2$の解x，yを考えるとき，複素数の他に“有限体”と呼ぶ新しいタイプの数の体系を見出すことができる．

（１）「前の２１．４（２）で，方程式$y_2+y=x_3-x_2$の解x，yを考えるときには，その解がどんな数の体系に属しているかを指定することが重要で，どんな体系を選ぶかによって，異なる数学理論が出てくることを述べたが，複素数の他に選択肢がもう一つある．それは，Ｎを自然数として，“Ｎを法とする” xとyを探すというものだ．その意味は，右辺と左辺が，Ｎで割り切れる数を差し引けば等しくなるような，整数xとyの組を探す，ということである．例として，この方程式の“Ｎ＝５を法とする”解を探すと，すぐに見つかる解として，x＝０，y＝０がある．さらに探すと，あと三つの解が見つかる．x＝０，y＝４．このとき左辺は２０，右辺は０だから，左辺と右辺の差は２０で，これは５で割り切れる。同様に，x＝１，y＝０，およびx＝１，y＝４も，５を法とする解である．われわれは今，まったく新しいタイプの数の体系を見出すことになった． ｐを素数として，０からp−１までの整数の集合｛0,1,2,…,p−１｝を考えると，それは，有限個の数からなる集合であり，この集合に対しては，ｐを法とする足し算と掛け算を行うことができる．この数の体系を，p個の要素からなる“有限体”と呼ぶ．この数の体系は，有理数の数の体系とは性質が異なるように見えるが，目立った共通点がある．それは，足し算，引き算，掛け算，割り算という演算のもとで，閉じている，すなわち，演算の結果がもとの集合に含まれる，ということだ」．

（２）「実数と複素数の場合に加え，代数方程式の解x，yとして，有限体｛0,1,2,…，p−2,p−１｝（pは素数）の中に値を取るものを探してもよい．これは,三次方程式$y_2+y=x_3-x_2$にxとyを代入したときに，右辺と左辺がそれぞれ整数で，その値がｐの整数倍だけ違っていてもよいということだ．このとき得られるのが，数学者が“有限体上の曲線”と呼ぶ対象である．もちろん曲線とは言っても，いわゆる曲線ではない」．

２１．６　ヴェイユの洞察は，解を探す範囲に応じて，一つの方程式から，面が生じたり，曲線が生じたり，点の集まりが生じたりすることだった．

（１）「ヴェイユの深い洞察は，最も基本的な数学的対象は，三次方程式$y_2+y=x_3-x_2$のような，代数方程式だということだった．解をどの範囲で探すかに応じて，一つの方程式から，面が生じたり，曲線が生じたり，点の集まりが生じたりする．しかしそれらはどれも，方程式それ自体という，大いなる存在の“アバター”に過ぎない」．

（２）「リーマン面と有限体上の曲線とのつながりは，もはや明らかだろう．どちらも同じ方程式から生じるのだが，解を探す領域が異なり，一方は有限体，他方は複素数の範囲で解を探すのである」．

２１．７　ラングランズ対応をヴェイユの枠組みの“リーマン面”に当てはめる方法は何か？

（１）「ラングランズの最初のアイディアは，ヴェイユの枠組みの左側のコラム，つまり数論に関するものだった．彼は数体のガロア群の表現（数論の対象）を，保型関数（調和解析の対象）と関係づけた．調和解析は，数論とは大きくかけ離れた領域である．それはまた，ヴェイユの枠組みの他の二つのコラムともかけ離れている」．

（２）「ラングランズの対応を，枠組みの真ん中のコラム（有限体上の曲線）に当てはめるのは比較的簡単だが，ラングランズ対応を，枠組みの右側のコラムのリーマン面に当てはめる方法については，ほとんど何もわかっていない．それをするためには，リーマン面の理論において，ガロア群と保型関数のそれぞれに似たものを探し出さなくてはならない．ラングランズがアイディアを初めて定式化した時点では、前者は知られていたが，後者はまだ大いなる謎だった．１９８０年代になって，それらしい概念が発見されて，その路線を切り開いたのは，ウラディーミル・ドリンフェルドだった．それによって，ラングランズ対応を，枠組みの三つ目のコラムに持ち込めるようになった」．

（３）「リーマン面の理論において，ガロア群と似たものは，リーマン面の“基本群”である．一例としてトーラス上の一点Ｐを考え，Ｐに始まりＰに終わる閉じた経路を二つ考えて見る．一つは，ドーナツ型の胴体の一点Ｐから横方向に円環してＰに戻ってくる経路．もう一つは，胴体の一点Ｐから縦方向に円環してＰに戻ってくる経路．トーラスの場合と同様に，与えられた任意のリーマン面の基本群は，ある決まった一点Ｐには始まりＰに終わる,そのリ

ーマン面上の閉じた経路を元とする群である．第三の経路を次のように構成する――まず第一の経路をくるりとたどり，それから第二の経路をくるりとたどる．こうして，やはりＰに始まりＰに終わる，新しい経路が得られる．この方法による閉じた経路の足し算は，群が満たすべき特徴をすべて満たしているので，これらの経路は，確かに群になっていることがわかる」．

２１．８　リーマン面の理論において，保型関数と似たものを見出すには思考の飛躍が必要になる．保型関数とのアナロジーが成り立つのは，高度に洗練された現代数学の対象“層”なのだ．

（１）「次の課題は，リーマン面の理論において，保型関数と似たものを見出すことである．ここでわれわれには，思考の飛躍が必要になる．古き良き“関数”では，その役目が担えないからだ．保型関数とのアナロジーが成り立つのは，高度に洗練された現代数学の対象“層”なのだ」．

（２）「“数からベクトルへ”ということを考えてみよう．数といえば，まずは自然数１，２，３，……だが，自然数には様々の使い道がある．例えば，次元を指定するのに使える．直線は一次元，平面は二次元で，任意の自然数ｎに対して，ｎ次元の平坦な空間がある．それをベクトル空間［線形空間］と言うこともある．自然数がベクトル空間で置き換えられた世界を想像してみよう――１の代わりに直線，２の代わりに平面を考えるのだ 」．

２１．９　自然数は集合を作るが，ベクトル空間は，数学者が圏（カテゴリー）と呼ぶ洗練された構造を作る．

（１）「ベクトル空間には，自然数における足し算と掛け算によく似た演算がある．しかし，ベクトル空間というパラレルワールドは，自然数の世界よりもはるかに豊かなのだ！ 数には内部構造がない．３座標で表される球面上の回転はSO(3)と呼ばれる回転群を形成するが，SO(3)の任意の元からは，三次元空間の回転が生じる」．

（２）「自然数は集合を作るが，ベクトル空間は，もっと洗練された構造を作る．その構造のことを，数学者は圏（カテゴリー）と呼んでいる．与えられた圏は，例えばベクトル空間のような“対象”（オブジェクト）を持っている．それに加えて，どれかの対象を別の対象に移す“射”（モルフィズム）がある．例えば，ある対象を，それ自体へと移すような射は，本質的には，その圏の内部で許される，その対象の対称変換である．それゆえ圏の言葉を使えば，それがどんなものから構成されているかだけでなく，対象同士がどのように相互作用するのかも調べることができる」．

（３）「集合から圏へのパラダイム・シフトは，現代数学の駆動力の一つになっている．その動きのことを“圏論化”と言うが，それはいわば，新しい世界を作ろうとしているようなものだ．そこでは，慣れ親しんだ概念が，より高いレベルのものに高められる．例えば，数はベクトル空間に置き換えられる．その世界では，関数は何になるのだろうか？」

（４）「ある幾何学的対象，例えば球面や円周，あるいはドーナツの表面のようなものがあって，それをＳと表そう．整数の群は離散的だが，円周など回転群の回転角は０～３６０°まで連続的に変化させることができ，すべての角度を合わせると，円という，つながった一つの図形になる．そのような図形を“多様体”と呼ぶ．多様体Ｓ上の関数ｆは，Ｓに含まれる各点ｓに，一つの数を割り当てるルールである．その数のことを，点ｓにおける関数ｆの値と呼び，ｆ（s）と書く．多様体Ｓの各点に割り当てるものを，数からベクトル空間に変えてみよう．そのような規則のことを，“層”と呼ぶ．層をＦで表すと，点ｓに割り振られたベクトル空間は，Ｆ(s)となる．与えられた層に対して，各点ｓごとに割り当てられるベクトル空間の次元は，それぞれ異なっていてもよい．ベクトル空間が，数の圏論化であるように，層は、関数の圏論化である」．

２１．１０　グロタンディークは，関数と層との間に，深いアナロジーがあることを発見した．

（１）「“層”とは何か？　われわれに重要なのは，関数と層との間に，深いアナロジーがあるということだ．それを発見したのが，アレクサンドル・グロタンディークである」．

（２）「ヴェイユの枠組みの真ん中のコラムに注目しよう．そして有限体上の曲線と，より一般的な有限体上の多様体について調べる．これらの多様体は，多項方程式の系によって定義される．例えば，$y^2+y=x^3-x^2$もその一つである．そのような多様体上に，一つの層があると仮定しよう．層は，多様体上の各点に，ベクトル空間を割り当てるルールだが，実はさらに構造を持っている．層の概念は，今考えている多様体が定義されている数の体系（この場合は有限体）の任意の対称変換から，そのベクトル空間の対称変換が生じるように定義されているのである．特に，有限体のガロア群の元であるフロベ

ニウス写像からは，このベクトル空間の対称変換（例えば回転や伸張など）が必然的に生じる．要するに，有限体｛0,1,2,…，p−１｝上に多様体Ｓがあり（ヴェイユの枠組みの真ん中のコラムを考えているとして），Ｓ上に層Ｆがあるなら，Ｓの各点ｓに対して，一つの数を割り当てることができる．これにより，Ｓ上の関数が得られる．つまり，ヴェイユの枠組みの真ん中のコラムにおいて，層から関数へと進む方法が得られたわけだ．さらに，層上の自然な演算は，関数上での自然な演算と同じだ．だが，関数から層へと戻る自然な方法はない」．

２１．１１　一つの層がいくつもの対称変換を持つこともあるので，関数を層に格上げすれば，それらの対称変換を利用して，関数を扱った場合よりも，はるかに多くの情報を得ることができる．

（１）「この発見が刺激となって，２０世紀の後半に数学は大きく発展することになった．なぜなら層は，関数よりもはるかに重要で，幅広い状況に適用できる数学的対象であり，ずっと多くの構造を持つからだ．例えば，一つの層がいくつもの対称変換を持つこともある．関数を層に格上げすれば，それらの対称変換を利用して，関数を扱った場合よりも，はるかに多くの情報を得ることができるのだ」．

（２）「われわれにとって特に重要なのは，層は，ヴェイユの枠組みの真ん中と右側のコラムの両方に関係するということだ．そして，ラングランズ・プログラムを真ん中から右側のコラムへ進めるための，一つの道が開けるのである．ヴェイユの枠組みの右側のコラムでは，複素数上で定義された多様体を考える．例えば，球面やドーナッツの表面などのリーマン面がそれだ．その場合，枠組みの左側と真ん中のコラムに現れる保型関数は，あまり使い物にならない．しかし層は使える．グロタンディークの発見によって，真ん中のコラムで関数を層で置き換えると，真ん中と右側のコラムの間で，再びアナロジーが成り立つようになる」．

２２．対称群の四つの公理が生み出す対称変換の構造による同型のパターンが数学の異なる領域の間に見られる．

（１）数学の推論プロセスでは，論理的分析的演繹的な推論によって，領域的な知識が様々に分かれて発展した．それらの知識は，高深度・領域的な様々の異型の情報構造を生み出した．

（２）様々に枝分かれした数学の領域的な知識は，ラングランズとヴェイユの洞察に基づく直観的構成的な帰納の推論によって，広域的・低深度な同型の情報構造にまとめられた．

（３）エドワード・フレンケルの記述から分かるように，数学の異なる二つの高深度・領域的な知識の間では，①代数的な構造と代数的な構造の間，②幾何的な構造と幾何的な構造の間，③代数的な構造と幾何的な構造の間，に対称変換の構造による同型のパターンが見出されている．すなわち，「ある領域のパターンについて何か情報が得られれば，他の領域に見られるパターンの意味を探るヒントになる．数学者たちは，数論，調和解析，幾何学，表現論，数理物理学など様々な領域で，相当異質な対象を調べているにもかかわらず，よく似た現象を見る．そういう現象を手がかりとして，一見バラバラに思える現象を，壮大なジグソーパズルのように組み合わせているのだ」．

２３．“圏論”ならびに“層”は，代数的構造と幾何的構造の間の異型性と同型性を融合して生み出された，高次の抽象的・普遍的な情報構造である．

（１）“圏論”は，数―集合―対称群という代数的構造とベクトル―ベクトル空間という幾何的構造の間の異型性と同型性を融合して生み出された，高次の抽象的・普遍的な情報構造であり，“層”は，数―関数という代数的構造とベクトル―ベクトル空間という幾何的構造の間の異型性と同型性を融合して生み出された，高次の抽象的・普遍的な情報構造であると考えられる．

（２）群論では，四つの公理が生み出す対称変換が定義されているが，“圏論”では逆元を除いた三つの公理が生み出す対称変換が定義されている．数理理論として，正則性と偶有性のリバランスを図って，自然の中に見られる現象のより多くを対称変換のパターンとして扱い得るようにしたものなのであろうか．「一つの層がいくつもの対称変換を持つこともある」ので，それらの対称変換を利用して，関数を扱った場合よりも，はるかに多くの情報を得ることができる」と言われる“層”への期待も含め，数学の圏論化への動向を，人間の脳の推論プロセスと数学における推論プロセスを比較する観点から注視して行きたい．

文　　献

遠山啓（2012）．現代数学入門．　筑摩書房．
西郷甲矢人・能美十三（2019）．圏論の道案内　技術評論者．

近藤和敬（2013）. 数学的経験の哲学：エピステモロジーの冒険. 青土社.

リード, C. 彌永健一(訳)（1972）ヒルベルト:現代数学の巨峰. 岩波書店.

サモシ, G. 松浦俊輔(訳)（1997）時間と空間の誕生：蛙からアインシュタインへ. 青土社.

福永征夫（2019）．「知の統合基盤の確立をめざして」．2019 年度日本認知科学会第 36 回大会論文集.

デカルト, R. 谷川多佳子(訳)（1997）方法序説. 岩波書店.

青柳正規（2018）. 人類文明の黎明と暮れ方．講談社.

武田暁（2004）. 脳は物理学をいかに創るのか. 岩波書店.

ファインマン，Ｒ・Ｐ.江沢洋(訳)（2001）物理法則はいかにして発見されたか. 岩波書店.

ダンツィク,T．水谷淳(訳)（2007）数は科学の言葉. 日経ＢＰ社.

クーラント, R.／ロビンズ，Ｈ．森口繁一(監訳)（1966）数学とは何か：考え方と方法への初等的接近. 岩波書店.

フレンケル, E．青木薫(訳)（2015）数学の大統一に挑む. 文藝春秋.