２０１８．２．１７

第１１８回アブダクション研究会開催のご案内

アブダクション研究会
代表・世話人　福永　征夫
TEL ＆ FAX　0774-65-5382
E-mail：jrfdf117@ybb.ne.jp

事務局　岩下　幸功
TEL & FAX　042-35-3810
E-mail： chaino@cf6.so-net.ne.jp

■ホームページ■
http://abductionri.jimdo.com/

第１１８回アブダクション研究会の開催について、下記の通りご案内を申し上げます。
第１１７回アブダクション研究会のレポートの取りまとめに相当の時間を要しました結果、本状の配信が大幅に遅れてしまいましたことをお詫び申し上げます。
このため、『第１１８回アブダクション研究会のご案内』は別途の簡易案内状をもって関係者に連絡配信し、予定通りの 2018 年 1 月 27 日に第１１８回アブダクション研究会を実施いたしました。

（１）第１１７回アブダクション研究会のご報告をします。

■２０１７年１１月２６日（日）に開催しました第１１７回アブダクション研究会は、『「数学の大統一に挑む」／エドワード・フレンケル著＝2015文藝春秋／を輪読研究して壮大な数学プロジェクトの意義を学ぶ』という重要なテーマで、大河原敏男氏と世話人の福永征夫が解説発表を分担し合うとともに、北村晃男氏の積極的な参画を得て、異なる数学の領域に架け橋をかける「ラングランズ・プログラム」の概要とその本質に関する基本的な理解につながる貴重な研鑽の機会を得ることができました。

■先ずは、解説発表者と参加者に心からお礼を申し上げ、感謝の意を表したいと存じます。

■「数学の大統一に挑む」の章立ては次の通りです。

はじめに	隠されたつながりを探して
第一章	人はいかにして数学者になるのか？
第二章	その数学がクォークを発見した
第三章	五番目の問題
第四章	寒さと逆境に立ち向かう研究所
第五章	ブレイド群

■わたくし（世話人）は、1990年から今日に至るまで『自然の循環の論理と人間の情報処理』のテーマのもと、主として広域学の諸学会を通じて理論モデルを提出してきています。
わたくしは次のように考えています。

【１】知・情・意の三系それぞれが認知の場を持つ
人間は知・情・意の三系それぞれの情報処理をし表象する認知の場を脳の中に持っています。

【２】時間の情報と空間の情報を時空間の情報構造として統合する
タテ糸としての時間の情報とはXの後にYが継起する非同期的な情報の組み合わせです。
ヨコ糸としての空間の情報とはXとYが隣接し同期する非継起的な情報の組み合わせです。
人間はタテ糸の時間の情報とヨコ糸の空間の情報をあたかも縄をあざなうように織り合わせて、時空間の情報構造として統合していきます。

【３】演繹の推論は領域・高深度の情報処理を担う
時間の情報-空間の情報-時間の情報の順で統合された時空間の情報構造は、「XとYが継起するように、X’とY’が継起する」という時間的なタテ型の同型性に基づく類比の推論を実現し、演繹の推論と呼ばれます。
演繹の推論は領域・高深度の情報処理を担っています。

【４】帰納の推論は広域・低深度の情報処理を担う
空間の情報-時間の情報-空間の情報の順で統合された時空間の情報構造は、「XとYが同期するように、X’とY’が同期する」という空間的なヨコ型の同型性に基づく類比の推論を実現し、帰納の推論と呼ばれます。
帰納の推論は広域・低深度の情報処理を担っています。

【５】アブダクションという創発の推論は高深度・広域・高次の情報処理を担う

時間の情報-空間の情報-時間の情報の順で統合されたタテ型の類比の推論と、空間の情報-時間の情報-空間の情報の順で統合されたヨコ型の類比の推論を高次のレベルで大統合するのがアブダクションと呼ばれる斜め（ナナメ）型の創発の推論です。
アブダクションの推論は高深度・広域・高次の情報処理を担っています。

■この案内状の最後部には、

数学における高深度・広域・高次の情報処理を考える
――情報の構造を同定して知見の転移を図る――

と題する**二部構成のレポート資料を掲載しました。**

●第一部　現代数学入門／遠山啓著／を学ぶ

［遠山啓著『現代数学入門』（2012/筑摩書房）から抜粋・引用させていただきました。］

●第二部　「数学の大統一に挑む」／エドワード・フレンケル著／
を輪読研究して壮大な数学プロジェクトの意義を学ぶ

［エドワード・フレンケル著＝青木薫訳『数学の大統一に挑む』（2015/文藝春秋）の全 20 章のうちから、はじめに・第１章・第２章・第７章・第８章・第９章・第 10 章・第 14 章・第 15 章の９章の範囲に絞って、そのポイントとなる重要な数学内容の記述を選択し、抜粋・引用させていただきました。］

■案内状の最後部のレポート資料を、粘り強く、繰り返しお読みいただいて、
数学における高深度・広域・高次の情報処理**について**、広く深く研鑽する機会になさってください。
　また、それらをこれからの研究活動とアブダクション研究会での探究に生かしていただくようにお願いをいたします。

■その他の参考文献

F. William Lawvere and Stephen H. Schanuel “Conceptual Mathematics ― A first introduction to categories （1997/Cambridge UNIVERSITY PRESS）

（２）アブダクション研究会は、次なる３０周年に向けて、新たに有意義なスタートを切ってまいります。

今年は歩んできた道を踏みしめ、次なる３０周年に向けて、新たなステージの夢と展望を描いて共有し、気持ちも新たに有意義なスタートを切ってまいりたいと存じています。
次なる３０周年に向けた、新たなステージの夢と展望は、「どのような方向に広域学の確立をめざすのか」という点に求めて行きたいものと世話人は思案をしています。
すなわち、それは、次の二点に集約されます。

❶「精神」のプロセス、「物質」のプロセス、および「生命」のプロセスを、共通的に認識し理解できるように、広域的な知識を発見し発明して高次の包括的な知識を創造する道への入り口をどのように切り拓くのかを探究し、発信できるようにすること。

❷以上の探究とパラレルに、「持続可能性を確保する知識と行動」を探究し実践に移すことのできる条件を確保できるようにすること。

皆様はいかがお考えでしょうか。
わたくし宛にご意見とご感想をお寄せくだることを希望し期待しています。

（３）次なる３０周年に向けた、新たなステージのアブダクション研究会は、「過去を想起し、未来を想像し予期して、今ここに対処する」という、人間の認知、思考と行動、評価・感情のパターンに則って、テーマや活動の時間・空間の深さと拡がりを追求してまいります。

これは、世界や社会の歴史と未来への展望のはざまで、現前に対して、避けず、逃げず、ぶれずに、本質的で、現実的な、対処をして行かなければならないという、アブダクション研究会がめざす、取り組みの基本的な姿勢と態度でもあります。

また、狭義には、過去とは、アブダクション研究会の今までの記録でもあり、未来とは、次回研究会から来年度までの予定と計画でもあります。
常に、そうした活動の時間・空間の深さと拡がりの幅・厚みと奥行きを意識し合い、認識し合い、確認し合いながら、現前の活動を連綿として引き継いで、躍動するように、活動を積み上げてまいります。

（４）各界、各分野の皆様の積極的なご参加をお願いします。

既存の領域的な知識をベースにして、新たな領域的な知識を探索し、それらを広域的な知識に組み換えて、より高次の領域的な知識を仮説形成的に創造することを目標に、アブダクション研究の飛躍を期してまいりますので、各界、各分野、各層の皆様の積極的なご参加をお願いします。

（５）アブダクション研究会は、現在、新規の会員を募集しています。

新規の会員として、年齢・性別を問わず、①環境の変化に対応して個人や集団の能力をどのように発展させるのか。②人・もの・生命の情報のネットワークはどのように組織化されるのか。③持続可能性を確保するための知識と行動とはどのようなものなのか。などのテーマの研鑽と探究に興味と関心を共有でき、隔月のアブダクション研究会に継続して出席できる方を募集しています。

皆様のご友人や知人、関係先の方で、われわれと志を共有できる方がおられましたら、世話人または事務局に積極的にご連絡くださいますようにお願いいたします。

（６）アブダクション研究会は、知識の広域化と高次化を目指し進化を続けてまいります。

1996 年に設立されたアブダクション研究会は、地球規模の難題に真正面から対処するために、知識の広域化と高次化を目指し、いつまでも、真摯に、勇気を持って、粘り強く、積極的に、可能性を追求し、多様な探究を積み重ねて、一歩一歩進化を続けてまいります。

（７）発表をしてみたいテーマのご希望があれば、世話人宛に,積極的にお申し出下さい。

皆様には、今後に、ぜひとも発表をしてみたいテーマのご希望があれば、世話人宛に積極的にお申し出をいただきたく、お願いを申し上げます。お申し出は、通年的にいつでも、お受け入れをいたします。上記の方向に沿うものなら、いかなる領域に属するいかなるテーマであっても、将来の可能性として、誠意を持って相談をさせていただき、実現に向けて調整を果たす所存であります。

記

◇　日　時：　2018年1月27日（土）　１３：００～１７：００（本 会）
１７：１５～１９：１５（懇親会）

◇　場　所：　３３３１ Arts Chiyoda　２階・会議室

〒１０１-００２１　東京都千代田区外神田６丁目１１-１４（旧・練成中学校内）
TEL　０３-６８０３-２４４１（代表）
東京メトロ・銀座線　末広町下車④出口　徒歩１０分　練成公園隣の旧・練成中学校内です。

＊当日の連絡先（福永征夫・携帯電話）080-3515-9184

◇　テーマ：　研究発表

『持続可能性を確保する
　　　広域的で高次の知識と行動を考える（２）』

アブダクション研究会世話人　福永　征夫

■■会員の皆様には、知人や友人もお誘いいただいて、
積極的なコミットメントをお願いします■■

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

◇プログラム：

（１）研究発表［ PART－１ ］　　　　13：00～14：20
　　　　　　　＜小休止＞　　　　　　14：20～14：30

（２）研究発表［ PART－2］　　　　14：30～15：50
　　　　　　　＜小休止＞　　　　　　15：50～16：00

（３）総合的な質疑応答：　　　　　　　16：00～16：30

（４）諸連絡：　　　　　　　　　　　　16：30～17：00

（５）懇親会：＜皆様の積極的なご参加を期待しています＞　　17：15～19：15

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

【第１１８回 アブダクション研究会の出欠連絡について】

●１／２２（月）までに、下欄の要領で、必ず、ご返信ください。

●なお、研究会会場では、飲み物のサービスがありませんので、
皆様が各自で、ペット・ボトルや水筒をご持参ください。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

第１１８回 アブダクション研究会（１／２７）の出欠連絡

●１／２２（月）までに、必ず、ご返信ください。

●研究会、懇親会とも、必ず、下記により、ご連絡ください。
新会場のため、研究会、懇親会とも、より綿密な準備が必要なことを、何卒、ご理解ください。

FAX：　042-356-3810
E-mail：　chaino@cf6.so-net.ne.jp　岩下　幸功　行

●１／２７（土）の研究会に、　出　席 / 未定ですが調整　します。●懇親会に、　出　席 / 未定ですが調整　します。

欠　席　　　　　　　　　　　　　　　　欠　席

ご署名＿＿＿＿＿＿＿＿

＊＊＊

■次々回 2018年３月度の第１１９回アブダクション研究会は、

●2018年３月３１日（土）に、3331 アーツ千代田２階会議室にて、開催いたしますので、皆様には今からご予定いただき、積極的にご参加ください。

●２０１８年３月の研究会

◇輪読研究
テーマ　：『「生物はなぜ誕生したのか――生命の起源と進化の最新科学」ピーター・ウォード／ジョゼフ・カーシュヴィンク著＝梶山あゆみ訳／２０１６河出書房新社＝を輪読研究して「進化とは何か」を考える』

◇解説発表者　：　２０１８年２月に募集して決定する。
別途、グループメールで募集しますので、積極的にコミットしてください。

◇参考文献　：　当日にお知らせします。

■ 皆様、どうぞ、ご期待ください■

****

＜定例アンケート調査＞

もしご協力がいただければ、という趣旨であり、必須ではありません。
皆様のメッセージ集として他の会員にも伝達しますので、情報の交流に積極的に参画下さい。

⑴ 今、アブダクションの研究・実践と関連のある事項で特に興味をもって取り組んでおられること。
⑵ 研究会の議論の場を通して INTERSECTIONAL なアイデアや知見の INCUBATION が進んでおり、例会で発表したいと思っておられること。

⑶ これまで（第１回～第１１７回）の研究発表やなされた議論（「議事録」を参照下さい）に関して、さらに改めて質疑や意見を表明したいと考えておられること
⑷ アブダクションの観点から、注目すべき人・研究グループ・著書（古今東西不問）。
⑸ 細分化された「知」の再構築を図るという視点から、注目すべき人・研究グループ・著書（古今東西不問）。
⑹ 貴方ご自身がお考えになられている「知」の定義とは？
⑺ その他のご意見、ご要望、連絡事項など。
特に他学会・研究会での発表内容や発表論文等についても是非お知らせ下さい。

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

＊＊＊

数学における高深度・広域・高次の情報処理を考える

――情報の構造を同定して知見の転移を図る――

第一部
現代数学入門／遠山啓著／を学ぶ

構造という概念――同型

【１】
集合は現代数学を生み出していく一つの原動力になった。
そころがその後、「構造」（structure）という概念が出てきた。
集合とは単なるものの集まりをなしている一つ一つの構成分子、つまり要素の集まりですが、要素相互の関係は考えていない。

ところが構造というのは、この要素の間に何らかの相互関係が規定されている。
もしくはそういうものが定義されている。
こういうものを構造と呼ぶわけです。

【２】
構造という概念、これは建物にたとえると非常にうまく説明できる。
建物は昔からあったわけではなくて人間が建てたものですが、建物が建つ前にはまず建築材料を持ってくるわけです。
そこの建物をつくる敷地へ建築材料を集めてくる。
そういう状態のときはまだ集合だといっていい。
お互いに何の関係もない。
ところが建築材料を組み立ててくると、その建築材料の一つ一つの間に相互の関係がでてくるわけです。
この石の上にはこの柱をのっけるとか、この柱とこの柱はこのはりでもってつなぐとか、つまり一つ一つの要素の間を何らかの関係で結びつけるわけです。
そうすることによって建物ができる。
数学でいう構造とはそういうものです。

【３】
ただし建築物は物体からできています。
しかし数学の構造は物体ばかりではなくてもっと広くて、いわば概念の建築物のようなものです。
例えば月、火、水、木、金というのも、ものではないでしょう。
月、火というのは一つの概念、これが月曜日だといって見せるわけには行かない。
物体だったら何か重さとか体積があるが、そんなものはない。
しかし曜日の集まり——集合は何かといえば日、月、火、水、木、金、土ですが、ところがよく考えてみると、この曜日の間には相互関係がある。
例えば日曜の次は何かというと月曜である。
月曜の次は何か。・・・
つまり「次の日」というもので各曜日はつながっている、相互関係があるわけです。
すなわち、これを一番うまい具合に表そうとすれば、矢印でつないで、ぐるっと回すとよろしい。
こういう矢印で結びつけられている。
そう考えるともはや構造になってくる。
われわれはこういう構造を頭に入れていろいろな判断をしています。
ぐるっと回ったものを何らかの形で頭に入れて暦というものを理解していると思うのです。
つまりそういう構造が頭の中に入っているからいろいろな判断が敏速にできるのです。
そういう意味でしたら、構造なるものはわれわれはとっくに知っていることなのだと言ってもいいでしょう。

【４】
そういう例を例を二、三あげてみたいと思います。
要するに何らかの相互関係を持った何かのものです。

たいへん一般的ですけれども、構造とはそのくらい広い概念である。
例えばスポーツなどでリーグ戦というのがあって、三つのものの間に「三すくみの関係」になることがたくさんあります。
一番よくわかるのはジャンケンです。
じゃんけんの種類はいくつあるかといえば、石、鋏、紙といえばいい。
これは集合ですが、相互関係はどうか。
石、鋏、紙ですが、石は鋏より強い。
開いているほう（紙）が強く、つぼんでいるほう（石）が弱い。
鋏は紙より強い。
この強い弱いの関係全体は一つの構造だと考えてよろしいわけです。
これは三すくみの関係。
われわれがじゃんけんをするときに、この構造がすっかり頭に入っていて、石を出したり鋏を出したりしています。
こういう形で覚えているかどうかわかりませんが、要するにぐるぐる回っている関係です。

【５】
こういう関係を持った構造は、単にじゃんけんだったら、こういうものを三すくみなどという言葉すら考える必要はないと思いますが、三すくみという言葉ができたのは、これと同じような関係を持ったものが世の中には他にもいっぱいあるからです。
ものは違うけれども、このタイプの関係はいたるところに現れてくる。
本当かどうか知りませんが、ヘビとカエルとナメクジは三すくみの関係です。
こういうものを「同型」といいます。
建物の例に戻りますと、ものは全然違うけれども、設計が全部同じもの、集団住宅などはそうなっている。
ものは違うけれども建物の型は同じである。
昔私たちがやったメンコに庄屋、鉄砲、狐というのがあるが、これも三すくみの構造であって、同型です。
昔は庄屋が鉄砲を取り締まっていて、鉄砲を持っていると取り上げることができる。
だから庄屋が強い。
鉄砲は狐を撃つ。
狐は庄屋をだます。

【６】
人間の思考の中には、ものは違うけれども相互関係のパターンが同じだということを見分ける力があります。
これは構造として同じである。
つまり同型であるというわけです。
それが実は数学という学問を人間が考え出したもとになっている。

【７】
三すくみばかりが決して構造ではありませんし、また数学者がこんな簡単なものを研究しているわけでもない。
日本の四国の県はもちろん香川、愛媛、徳島、高知と四つあります。

四国の県をあげなさいといえば、この四つをいえばいいわけです。
この限りにおいては、これは集合にすぎない。
相互の関係は何も考えていない。
ところがこれの地理学的な配置を問題にして、どの県とどの県は境を接しているかどうかということを問題にしてみると、相互関係が出てくる。
愛媛と徳島が境を接していて、香川と高知は接していない。
お互いに境を接しているという関係まで考えると、もはや一つの構造になる。
こういう配置になっているところ、四つの県を持ち出してこれと同じ型になっているところは日本の他のところにいくらでもあります。
九州の鹿児島、熊本、宮崎、大分というのはちょうどこんな配列になっています。
境を接しているという関係に着目すれば同型です。
ところが四つの県でも、境の接し方のタイプの違うものは他にいくらでもある。
このように、構造が同型の場合と同型でない場合とがある。

【8】
つまり人間にはそういういろいろなパターンを頭の中へ持っていて、そのパターンに照らし合わせて考えていくという能力があります。
そのパターンのことを構造と呼んでいるのです。
だから構造は人間の思考の一つの側面をかなりよく代表しているものだと思うのです。

構造の科学

【9】
数学という学問の特徴は、一つ一つのものの性質を研究することを任務とするものではなくて、ものの方は一応棚上げして、相互関係のタイプに重点を置いて研究する。
そういう意味で数学を「構造の科学」として規定することができる。

いろいろな構造が数学という学問の中にストックされている。
世の中がだんだん進歩するにつれて、そのストックは増えていっている。
数学者は職業上いろいろな構造あるいはそういうパターンを知っている。
だから専門家になる。
しかし数学者でない人も相当たくさんのパターンを知っているはずである。
それでいろいろな現実の問題を処理している。
だから数学は構造の科学というふうにいうと、大変その性格がはっきりしてくる。

【10】
「構造の科学」、つまりストルクトゥール・ヴィッセンシャフト（Strukturwissenschaft）という言葉はドイツ人が使っておりました。
これは「数学」という言葉よりは、その性格がよくわかるのです。
大学の数学科というのは理学部にあります。
つまり自然科学を主として研究する学部の中にあるのですが、今まではそれでもだいたいよかった。
つまり数学のやっていることが主として自然現象に関係しておった。

ところが最近では、数学が社会現象の中にいくらでも関係する。
つまりパターンが同じ現象が社会現象の中に現れてくれば、いくらでも社会現象にも使えるわけです。

【11】
これは一つの例で、専門家でないから自信を持って申し上げられませんが、大体こういうことがいえるそうです。
ここにAという都市とBという都市の二つの都市がある。
AからBへ行くトラック、汽車あるいは全部の交通量は――Aの人口をm_1、Bの人口をm_2とし、ABの距離をrとします――そうすると人口の積に比例し、そして距離の２乗に反比例する。

$$k\,m_1 m_2 / r^2$$　（kは定数）

これに非常に近い法則があるのだそうです。
これをさっき言った社会現象に数学を応用していろいろ経験的にやってみると、だいたいこういうふうになっているのだそうです。
もちろん大まかに言っての話ですが、いかにもありそうです。

【12】
これは社会現象の中にある一つの法則ですが、これと同じ法則が万有引力にもあるのです。
二つの物体が引き合う力は、その二つの物体の質量の積に比例して距離の２乗に反比例する。
だからその法則のタイプは万有引力にもあるし、都市の交通量にもある。
一方は自然現象、一方は社会現象ですが、万有引力の方で研究しておけば、そっくりそのまま社会現象に使える。
こうなってくると数学は自然科学とは言えないのです。
同じ構造を持ったものが出てくれば何にでも使える。
だから数学は自然科学とか社会科学とかいう分け方ではなくて「構造の科学」といった方が性格をよく表している。

【13】
構造というものを広く考えてみると、ほかにもたくさんあると思います。
例えば音楽の楽譜ですが、これもある意味では構造です。
ドレミファという音が一定の順序で並んでいるわけですから、これも一種の構造であると言えないことはない。
絵も、いろいろな色彩が単に雑然と並んでいるわけじゃなくて、一定の構造を持って配列されている。
だから、絵を描く人は、そういう色彩の構造を実際に作っていることになります。
作曲家は音の構造を作っていると言えないことはない。
あるいは碁の名人は碁石の構造を作っていると言えないこともない。
そのように非常に広く解釈すると、人間の創造的活動は必ず何かの構造に関係がある。
新しい構造を作り出すのがある意味で創造力かもしれない。

建物が構造のいい例であるとするならば、建築の設計家は新しい構造を作り出すという創造力を持っていることになります。
そういうように非常に広く解釈すると、構造というものは至るところに出てくる。

【14】
ところが、あまり一般化してしまうと、何でもかんでも数学になってしまう。
そこで一応ふろしきを広げておいてから、今度はつぼめないといけない。
数学という学問で研究する構造というものをある程度限定しようというのです。
そこで構造というものをだいたい３種類に限定したのです。
それが位相的構造、代数的構造、順序構造です。

【15】
位相的構造というのも、やはり集合というものがもとになります。
何かのものの集まり、その間に何らかの相互関係が入っているのですが、その相互関係が簡単にいえば「遠い近い」の関係である。
二つのものが遠いか近いかという規定がしてある。
この位相的構造の一番いい例は、われわれの住んでいる空間です。
それは点の集まりだと考えますと、点と点の間の距離というものがちゃんと定まっています。
この点とこの点は近いが、この点とこの点は遠いという判定がちゃんとつけられるようになっている。
こういうものがわれわれの頭の中に入っているから、われわれは非常に敏速にいろいろな行動ができるわけです。
われわれの住んでいる空間は確かに位相構造の大変あざやかな例ですけれども、必ずしもそればかりではない。
例えば２点間の距離というのは、空間的な２点間の距離と考えてもいいし、また別種類の広い意味の距離だって考えられる。

【16】
代数的構造というのは、皆さんが代数をおやりになったのを思い起こしていただけばいいと思いますが、｛1,2,3,・・・｝、こういう正の整数あるいは自然数ともいいますが、集合がある。
これは無限個あります。
単なる集合だけでなくて、足し算というものでこのかってな二つを足せば、例えば１＋５＝６というように、二つ選んできて足し算でくっつけると６という数が作り出される。
こういうふうに二つを結合して新しく６というものが作り出されると考えますと、この間に一つの相互関係が規定されてくる。
任意の二つを持ってきて足し算でくっつけると第三のものが出てくる、明らかに相互の関係が出てくる。
こういう相互関係を持ったものを代数的構造といいます。
これもその一種です。
もちろんこんな簡単なものばかりやっているわけではありませんが、これも一つの例です。

【17】
順序構造ですが、これは 1,2,3,4 という自然数あるいは整数というものは、単なるものの集まりではなくて大小の順序があります。
したがってこれはそういう意味では順序構造である。
血液型の関係では、OとAとはOからAには輸血できるが、AからOへはできませんから、そこに一つの順序がついています。
あるいは「銀行の行員のメンバーをあげよ」といえば、アイウエオ順であげておけば、これは単なる集合です。
銀行の場合、頭取に一番の命令権があって、それから専務、部長、課長となっているので、この順序であげると、順序構造になる。

【18】
数学というのは計算ばかりやっている、あるいは計算の術だというふうにお考えになるとだいぶ違うのです。
だから何かの問題にぶつかったときに、ああこれはこういう構造を持っている。
同じ構造が数学の中ですでに研究されておれば、その成果はすぐ使えるわけです。
そういう意味で数学は「数の学問」だという理解よりは「構造の科学」として理解しておくと、いろいろな具体的な問題にぶつかったときに接触面が非常に多くなってくるということは言えると思うのです。

【19】
この構造的に捉えるということは、数学以外のことをやっている人が盛んにやっていることです。
というよりは、人間はみんな構造的に捉えることができる能力を持っている。
構造というのは、言葉でいうと物事のパターン、型である。
型で考えるということが人間はできるのです。
数学は、人間のそういう能力を特に伸ばそうという傾向を持っている。
そういう型で捉えるという考え方を系統的に、あるいは体系的に発展させたのが数学だということになれば、数学というのはもっともっと広い、いわゆる数学者でない人にも大変かかわり合いの深い学問だということになってくる。
絵を描くこともある意味では構造的に捉える、あるいは構造を作り出すことですし、音楽だってそうです。
これは人間の活動の、特に創造的活動にかかわり合いがあります。

構成的方法

【20】
今までの時代の数学の特徴を簡単な言葉でいうと、古代は経験的である。
そして帰納的である。
中世は演繹的である。
しかしそれは動的ではなくて静的である。
近代は動的である。

現代はいま言ったように構成的である。
また構造を作り出す。
こういうふうになってきていると言える。

【21】
構成的というのでいちばん典型的なものは建築です。
建築は、自然にあるものを人間の都合のいいように組み立て直して作るわけです。
建物というのは、人間が一定の目標を立てて、それにふさわしいようなものを建てるわけだから、構成的である。
数学そのものがこういうふうに変わってきている。
建築家が新しい物を建てるのと同じように、数学という学問は新しい構造を作り出すことが可能になってきている。
それは必ずしも現実の中にそのままあるとは限らないようなものを新しく作って行く。

【22】
今までの科学そのものの発展がやはりそういうふうになっている。
例えば化学は、昔は自然に存在するものをそのまま、どういう組み立てになっているかを分析した。
水はH_2Oであるというように、ありのままに存在しているものを分析していった。
ところが化学が次第に発展するにつれて、今までになかったものを作り出す。
これはわれわれの身の回りにいっぱいある。
合成繊維だとか今の着物はほとんど自然にあったものとは違う。
綿とか絹とかではなくて、人間が勝手に合成して作ったものです。
合成というのは、組み立てを自然にあるものと変えることです。
石炭というのは自然に存在していたけれども、それを水素とか炭素とかに分けて、もう一回都合がいいように再構成したものである。
数学の場合にも、自然の中には存在しないような構造がいっぱい出てきた。
こういうふうに構成的になってきたということは、数学ばかりではなくて、あらゆる学問がそうなのです。

【23】
もっと典型的なことを言うと人工衛星がそうです。
衛星というのは、地球の衛星は月だということで大昔からあったけれども、今度は人間がその衛星を作り出す。
人工の中には人工甘味料ののようにあまり良くないものももちろんあるが、人工の力がまだ不十分だからでしょう。
化学が本当に発展していないから、有毒なものもかなり出てくるわけですが、とにかく元素の間の新しい組み合わせを作ることによって新しい物質を作り出すことができるようになった。
これと同じことが数学でもたくさん言えてきた。
これが近代の数学と考え方が違うところです。

【24】
近代数学は、自然のありのままのものを非常に精密な顕微鏡で見るようなものであった。
これが微分積分であった。精巧なカメラ、写真みたいなものである。
ところが、現代の数学は必ずしもそうではなくて、もちろん、そういう段階を経ているわけですけれども、やっていることはかなり違ってきている。
現代の数学の考え方を構成的ということにしましょう。
建築に限らず、だいたい工業でやっていることはすべて構成的であるといってよい。
今まではありのままのものを精密に見ることだったけれども、今度は構成的になっている。
今までになかったものを作り出す。
そういう一つの考え方の転換ができた。
これは人間の力がだんだん進んでゆくと自然にそうなると思います。
いろんな人工物がたくさん出てきたのと、ちょうど歩調を合わせているのです。

現代数学と芸術と科学

【25】
もう少し広い言葉でいうと、近代までの数学は、芸術の言葉を借りると自然主義、あるいは写実主義などに大変近い。
ありのままのものを忠実に写しとる写真のようなものである。
現代の数学は必ずしもそうではなくて、20 世紀になって出てきたアブストラクトの絵だとか、あるいはシュール・リアリズムのような傾向をかなり持っている。
現実から離れてはいないけれども写真ではない。
ピカソの絵などに見られるように、現実とは離れていないけれども、現実のある側面を極端に誇張したようなものが出てきている。
現代の数学は、それと大変よく似ている。
ヒルベルトの『幾何学の基礎』から始まって、現代の数学のそういう考え方、つまり構造みたいな考え方が出てきた。

【26】
構造という考え方は、おそらく歴史的には数学の中で一番早く出てきた。
しかし、最近になって、数学の考え方がいろんな方面に伝染したというか、広がっている。
最近では構造主義という一つのものの考え方がいろんな方面に出てきている。
心理学とか言語学とか文化人類学のようなところへ構造という考え方がたくさん広がってきつつある。

動的体系

【27】
構造という考え方を最もよく表わすのにそれを建物にたとえた。
建物というのは少なくともいったん建てたら動かない建前になっている。
建物がいろんなふうに動くということは今のところは考えられない。
建物は動的ではなくて、やはり静的である。

最近はくるくる回転する建物がありますが、ああいうのは例外でしょう。
そういう意味で構造という概念は、なんといっても動的ではなくて、静的なわけです。
ここにやはり構造という概念の持っている限界があります。
構造というものでいろんなものを見ると、どうしても静的な面だけが出てきて動的な面がだんだん影が薄くなってくるおそれは十分にある。

【28】
例えば構造を持っていて、しかも、その構造が常に変化しているようなものがある。
生物の身体がそうだと思います。
生物の身体は実に複雑な構造を持っている。
これは単なる細胞が雑然と集まっている集合ではない。
それが実に複雑な相互関係で結びつけられている。
生物の身体ほど複雑な構造を持っているものはない。
しかも、それは常に変化している。
人間の場合には、生まれたり成長したり、あるいは死んだりしている。
昆虫の身体は変態もする。
つまり本来の構造というのは動かない。
空間的ではあるけれども時間的ではない。
ところが、実際のものは構造を持っていて変化する。
つまり時間的に変化する。
だから構造ということだけを考えてゆくと、どうしても空間的な面だけが強調されて、時間的な面がおろそかにされるという傾向は十分にあるのです。
構造という概念は、建物を理解するのには都合がいいが、生物の現象を理解するのにはどうしても不足である。
生物は変化している。
こういった点でやはり空間的であって時間的でもあるような、両方を兼ねているような概念が新しく生まれてくる必要があるのではないか。
そうしないと動的な面がどうしてもおろそかになる。

群――その１

【29】
そういう考え方をある程度満たしているようなものとして「群」という概念があります。
この群という概念は現代になって出てきたのではなくて、もう少し前です。
19 世紀の初め頃、この群という概念を使って非常にめざましい成果をあげた人はガロア（1811-1832）です。
では一体どういうことをやったのか。
群とは何なのか。
あるいは代数的構造の中の最も典型的なものだといってもいいかもしれない。
しかし、それだけではあまりわからない。
群というのは何らかの操作の集まりです。
操作というのはオペレーションとでもいいますか、何らかの手続きをいいます。
例えば、われわれが上着を脱ぐ、あるいは上着を着る。
これは一つの操作である。

上着を着るという操作が一つだと、それの逆の操作が上着を脱ぐという操作である。
レイン・コートを着るという操作がまた別にあると、レイン・コートを脱ぐという操作はそれの逆の操作である。
だから、ある操作と、その逆の操作を続けて行うと何もしなかったのと同じになる。
それから二つの操作を連結する。
例えば、上着を着るという操作と、レイン・コートを着るという操作を二つつなぐと、上着とレイン・コートを重ねて一度に着ているのと同じ操作になってくる。
右へ１メートルだけ移動するという操作と、右へ２メートル移動するという操作を二つつなぐと、右へ３メートル移動したのと同じになる。
これを「操作をつなぐ」といいます。

【30】
こういうことがお互いにできるような操作の集まりを群という。
必ずその群の中には逆の操作が含まれている。
この操作の集まりということは出し抜けにいわれるとわかりにくいのですが、ある程度わかれば大したことではありません。
例えばテレビのダイヤルが仮に 12 だけあるとすると、このダイヤルを右に２だけ回すという操作、１だけ回すという操作、２だけ回す、３だけ回す・・・。
12 回回すのは何もしないのと同じだから、これは０だけ回すということ。
結局、操作の集まりが 12 あるわけです。
２だけ右に回す操作の逆は左へ２だけ回す操作です。
これを二つくっつけて、２だけ右へ回すのと３だけ右へ回すのをくっつければ５だけ右へ回すことになる。
つまり、二つの操作を結合して第三の操作が出てくるから代数的構造である。
二つを組み合わせて第三のものが出てくる。
こういう操作というものを考えることによって数学の中に大変だいじな方法が見つかったわけです。

解剖法と打診法

【31】
これは簡単にいうと、何かの構造を知るためにそれを動かしてみる。
ある操作でそれを変化させてみる。
そうして、どう変化するかを見て、そのものの構造を知るというやり方です。
例を挙げると、八百屋さんはスイカの中がよく熟しているかどうかをみるのに、スイカを外から叩いてみる。
割ってみることをしないで、スイカを外から叩いてみて、スイカを振動させ、そこから出てくる音で打診するわけです。
スイカを割ってみる方法を解剖法と仮にいうとすれば、叩いてみるのは打診法です。
人間は中を見ないでも、打診によっていろんなものの構造がよくわかる方法をいろんなところで知っているわけです。
お医者さんが患者のお腹の様子を知るのに打診をする。
群論というのは、ちょうど打診法に当たるわけです。
ものをある操作で動かしてみる。

その動き方でその構造を知るという、こういうやり方が出てきた。
あるいは地面の下の地質の構造がどうなっているのかを知るのに、最近では人工地震を起こして、その地震の波の伝わり方で地質を判定する。
これなどはまさにスイカを叩いてみて中を知るというのと似た考えです。
群論はだいたいそういう考えです。

【32】
ガロアはこの考え方を代数方程式を解くのに適用した。
そして完全にこの問題を解いた。
代数方程式は、中学で２次方程式まで学んだ。
２次方程式の次は３次方程式が必要になる。
次は４次方程式。
４次方程式まではいちおう解けた。
ところが５次方程式になるとどうしてもうまくゆかない。
足し算、引き算、掛け算、割り算と根号を使って解く。
これでやってみようと思ってもどうしてもできない。
そこで、これはいくらやってもできないのではないかという疑問が起こってきた。
そういう問題に対してガロアは、この群の考えを使って、５次方程式以上は、足し算、引き算、掛け算、割り算、それから根号の有限回の組み合わせではどうしても解けないということを証明した。
そういうやり方で解けるためにはどんな条件がなければならないかという条件も出した。
５次方程式はその条件に当てはまらないのです。
これで群論というものにこんなに威力があることが初めてわかった。

【33】
そして、この群論の考え方が他の部分にたくさん使われるようになった。
だいぶ後になって幾何学の研究に使われるようになった。
これは図形をやはり変化させてみる。
動かしたり伸ばしたり縮めたりすることによって図形の性質を知ろうというわけです。
最近では、物理学で原子の中のいろいろな状態を知るためにやはり群論を使ってうまく成功するのです。
群論というのが何らかの構造を知るための大変強力な手段になった。
この群論というのは、動かしてみるのですから、ある意味では静的ではなくて動的な方法です。

【34】
建物の組み立て、つまり建築も一つの構造ですが、この構造を研究するとか、あるいは壁紙の模様を作ってゆくとか、あるいは着物の模様を作るとか、こういったものにも群論が大変うまく使われています。
模様といっても写実模様ではなく幾何学模様のことです。
これは同じ部分が何回も繰り返すわけです。
この模様全体を左や右に移動しても（福永注：模様は）それによっては変わらないのです。
あるいは、線に対して完全に折り返しても変わらない。

しかし、ある線について折り返すと変わってくる。
どういう動かし方をしたら変わらないかというようなことから、模様をいろんないくつかのタイプに分けることができる。
大体、こういうのは 17 種類あるということになっていますが、そういうものがわかると一部分だけ書けば、あとはそれを動かしてひとりでに全部ができてしまう。
こういったことが群論を使うことによって大変見通しよく処理できるのです。
要するに、模様は一つの構造である。
それを動かしてみることによって性質を知ろうという考えです。

集　合

【35】
われわれがある機械の組立てを研究しようとするには、たいてい次のような段階を考えていくに違いない。
（１）どんな部分品からできているか。
（２）それらの部分品はどんな仕方でつながっているか。
機械をひとまず部分品に分解してしまう第１段階が集合論に当たるといってもよいだろう。
そこでは、おのおのの部分品がお互いにどうつながっているかについては、しばらく不問にしておくのである。
数学では具体的な機械そのものを研究したりはしないが、主として頭の中で考えられたものの組立てを研究する。
例えば一直線を点に分解して考えてみるようなことをする。
直線は点に分解することは実際にはできない。
なぜなら幅がなくて長さだけある直線は現実には存在しないし、それをまた幅も長さもない点に分解することはなおさらできない。
直線を点に分解するということは厳密にいえばフィクションの世界でしかできないことである。
しかし集合論ではともかく直線を点に分解して、その個数を数えることをやったのである。
しかし、これはあくまで仕事の半分であって、あとの半分は、一度分解した部分品を、もう一度つなぎ合わせて何かを組立ててみることである。

【36】
そのような第２段階の仕事をやったのはカントルではなく、ヒルベルトであったといえよう。
カントルが、次に来たるべき第２段階の仕事をはっきりと意識していたかどうかはわからない。
カントルのやった仕事を見ると、どうもそのことははっきり意識していなかったのではないかと想像される。
彼の主な目的は 1,2,3,・・・という有限の集合数やその計算法を無限の集合数に拡張することにあったのではないかと思われるのである。
そういう点から見ると、第２段階の仕事をはっきりと数学者の眼前に持ってきたのは、どうも別の人であった。
それがヒルベルトであったと言えよう。

ヒルベルトは「カントルが私たちに作ってくれた楽園から誰も私たちを追放してはならない」といっている。
それはやはりこのことを物語っている。

公　理

【37】
そのようにして生まれてきたのが公理主義であった。
一度バラバラに分解された部分品を組立てるには一定の設計図がいる。
ラジオの部分品を組立ててラジオを作るには配線図がいる。
この配線図に当たるのがヒルベルトの意味の公理である。
ユークリッドでは、公理は誰も疑うことのできないほど自明な事実を命題の形で述べたものであった。
しかし、ヒルベルトでは、そういう意味ではなく、分解された要素を組立てる一つの設計図となった。
だから、それは自明の事実である必要はなく、内部矛盾を含んでいないという最低限の条件を満足させていさえすればよいのである。
そういう意味では自由奔放に公理を設定してもよいということになった。

【38】
ヒルベルトは公理をそのように見直すことによって、数学者の構想力を思い切って解放したのである。
建築家がある建物を設計しようとするとき、彼はどのようなことを考えるだろうか。
まず、彼は自分の構想力を大胆に駆使して思い切って新しい建物を設計しようとするだろう。
その点では完全な自由が与えられている。
しかし、彼は一方において重要な制限を受けている。
それは力学の法則に従って設計をしなければならないということである。
極端なことを言うと、いくら自由であっても、中空に浮かんで柱のない建物を設計してはならない、ということである。

【39】
数学者も建築家と良く似た仕事をしている。
彼はどのような公理、もしくは公理系を選ぶことも自由である。
しかし一方では公理系の間に論理的な矛盾があってはいけない。
建築家にとって力学の法則に当たるのが、数学者にとっては論理の法則である。
建築家が力学の法則に従う以外は完全に自由であるように、数学者は論理の法則に従う以外は完全に自由である、と公理主義は主張する。

【40】
しかし、そういうだけでは物事の半分しか語ってはいない。
その自由とは何なのか。

建築家が力学の法則に従う以外は完全な自由を行使して作った建築物にもよい建築と悪い建築の区別があるし、美しい建築と醜い建築を見分けることはできる。
それらを区別するものはもはや力学の法則ではない。
なぜなら、よい建築も悪い建築も同じく力学の法則に従っているはずだからである。
それらの区別は建築物の使用目的や美学的なものさしによって定まってくるはずのものであろう。
数学者の設定する公理系についても同じことが言えるだろう。
数学者が己に与えられた自由を思い切って行使して設定した公理系にも、よい公理系と悪い公理系、美しい公理系と醜い公理系の区別はあり得る。
その区別の基準は論理的に正しいか誤っているか、にあるのではなく、その使用目標と美学的な物差しの中に求めなければならない。

【41】
ただ矛盾を含まないというだけなら、いくらでも違った公理系を考え出すことができる。
そしてそこには選択の基準はまだ与えられていないのである。
だからこの点を悪用すると、一人一人の数学者が勝手に別々の公理系を考え出して、一人一人が全然別の数学を研究するという危険が絶無であるとは言えないだろう。
確かにそのような危険は想像できるし、実際にヒルベルトの公理主義が現われた頃に、そのような危険について警告する人もいた。
しかし、その後の数学の発展は大勢からみると、そのような危険に落ち込まないですんだのである。
確かに公理系を設定することは自由であるが、その自由は放恣を意味しはしなかった。
数学者はわれわれを取り巻いている自然や社会に内在している法則に似せて、公理系を設定したからである。
彼らは与えられた自由を濫用しなかったのである。

【42】
ノイマン（1903-1957）は「数学者」（The Mathematician）というエッセーの中で次のように書いている。

・・・数学についての最も本質的に特徴的な事実は、私の考えでは、自然科学もしくはさらに一般的には、経験を単に記述的な段階より高い段階で解釈するあらゆる科学に対する全く特殊な関係である。
数学者やその他の多くの人間は、数学が経験的な科学ではないこと、また少なくとも経験的な科学の技巧からはいくつかの決定的な点で異なったやり方で研究されていることに同意するであろう。
それでもやはり数学の発展は自然科学と密接につながっている。
現代数学の最良のインスピレーションのあるもの（私は最良のものと信じている）は自然科学に起源を持っている。
数学の方法は自然科学の「理論的」な分野をおおい、それを支配している。
現代の実験科学においては、数学的方法もしくは数学に近い物理学の方法で接近できるかどうかが成功の大きな基準となってきている。
事実上、自然科学の全体を通じて数学に向かって近づこうとし、そして科学的な
進歩の考えではほとんど一致したいろいろの変種の切れ目のない系列が次第にはっきりしてきたのである。

生物学は次第に化学と物理学におおわれ、化学は実験物理学および理論物理学におおわれ、物理学は理論物理学のはなはだ数学的な形によっておおわれつつある。

数学の本性には全く特殊な二重性がある。
数学の本性について考える際にはこの二重性を理解し、それを承認し、これを消化しなければならない。
この二重の面貌は数学の面貌であって、どれほど単純化され一元化された見方も本質を犠牲にすることなしには不可能であると私は信じている。
だから私は一元的な見方を諸君に提供しようとはしなかった。
私は数学という多元的な現象をできる限り記述しようと努めたいのである・・・。

【43】
ノイマンのいう二重性は別の言葉でいうと、次のように箇条書きしてもよいだろう。
（１）論理的に矛盾がない限り、いかなる公理系を設定してもよいという自由。
（２）公理系はわれわれの住んでいる世界の中にある何らかの法則に起源を持っている。
この二つは自由とそれを拘束する条件である。
ノイマンのいうように、これはあくまで二重性に止まるだろうか。
それともこの二重性を統一するような共通の源泉が背後に潜んでいるだろうか。
この二重性に統一を与えようとして、いろいろのうまいコトバを発明することはできるだろう。
しかし、そういうことは大して意味のあることではない。
ここで必要なのは数学が容易には融合しにくい二重性に貫かれているということであり、むしろこの二重性の均衡の上に立っているということである。
しかもその均衡は静的ものというよりは動的な均衡である。
一方が優越すれば他方がそれを追い越そうと努める。
そういう形の動的な均衡であると言える。
いずれにしてもヒルベルトの公理主義は数学の本性を鮮明に浮かび上がらせ、それによって数学とは何ぞやという問題を新しい立場から考え直すきっかけを作ったことは否定できない。

同型――その１

【44】
ヒルベルトは「構造」という言葉は使わなかったが、彼の意味していたことはまさに構造というものに他ならない。
彼はフレーゲ（1848-1925）に宛てた手紙の中で次のように書いている。

私のいう点というのは任意のもの、例えば愛、法則、煙突掃除人・・・の体系であり、私のいう公理の全体というのは、これらのものの間の関係を考えているのですから、私のいう諸定理、例えばピタゴラスの定理も、これらのものについて成り立つはずです。

彼のいう公理というのは「何について」ということは一応不問に付して、いかなる型の関係が成り立つかということに重点がおかれているのである。

これと同じことを物語るもう一つのエピソードをブルーメンタールが伝えている。
あるとき、ベルリン駅の待合室で他の数学者と討論した際に、彼は次のように言った。

点、直線、平面の代わりに、いつでも机、イス、ビールのコップと言いかえてもよい。

これも、ものは何でもよい。
関係の型が問題なのだ、ということを言いたかったのであろう。
確かに「何」ということを不問に付して「いかに関係する」かに注意を向けるというのは自然の順序を無視しているようにみえる。
そこのところが、専門外の人間にとって理解しにくい点であろうと思われる。
しかし、その点にヒルベルトの考え方の新しさがあるのだといえよう。

【45】
われわれを取り巻く世界の中には不思議なくらい、同じ型の関係、同じとまではいかなくとも、類似の関係が存在している。
しかもまるで違った事物の中に同じ型の関係が存在しているものである。
またそのような事実が存在していなかったら、はじめから数学という学問そのものが生まれてはこなかったであろう。
直角三角形から生まれてきた sinx や cosx がなぜ単弦振動にも出てくるのか、不思議といえば不思議である。
円周率のπがなぜガウスの誤差法則に顔を出すのか。
電気のポテンシャルの微分方程式

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2 = 0$$

がなぜ、重力のポテンシャルにも出てくるのか。
また流体力学にも出てくるのか。
物が違うから法則の型も一つ一つ違ってもよさそうなのに、なぜ同じ法則がしばしば現われてくるのか。
造物主は別々の現象には別々の法則を与えるのは面倒なので、同じ型の法則で間に合わせたのだとでもいう他はなさそうである。

【46】
このように造物主の不精さ（？）から生じたとも思える事実が数学者にとって、つけ込むスキなのである。
数学者は、ｕが具体的には電気のポテンシャルであるか、重力のポテンシャルであるか、渦のない流体の速度のポテンシャルであるかを不問に付して、単なる抽象的な関数として、その性質を探求しておく。
それはその結果を電気にも重力にも流体にも適用してみたいからである。
このように同型の関係もしくは法則を持った数多くの現象をひとまとめにして研究することを、数学は学問の発生以来やってきたものである。
ヒルベルトの新しい着想も実はそのことを言っているに過ぎないのであって、その意味では少しも新しいことではない。
ただヒルベルトはそれを明瞭なコトバで表明したのに過ぎない。

構　造

【47】
今までになかったものを構成していくという点で数学は建築術に似ているが、構造（structure）というコトバもやはり建築術からとってきたものであるらしい。
このことはブルバキ「数学の建築術」という論文に出ている。
建築物は木材、医師、セメント、ガラス、・・・等の物質でできているが、数学の「構造」は点、直線、数、関数、集合、命題、操作、・・・等の概念からできている。
それらはもちろん物質ではないが、物質から完全に遮断された概念ではなく、やはり客観的世界の中にある何ものかの似姿であることは事実であろう。
構造というのはそれらのものを一定の法則に従って結びつけた有機的な統一体であるといえよう。
それらのものを結びつけ構成する法則をコトバで述べたものが公理であるということになる。

【48】
論理的な矛盾さえ含まなければ、どんな公理系を考えてもそれは自由である、というのはどんな構造を考えるのも自由だということである。
そこまでは無数に存在し得る構造の中でどれが重要であり、どれがつまらないか、と判断する基準はない。
しかし、世界の中で最も数多く現われる構造が、まず初めに研究されるべきだ、というなら、そこに選択の物差しが作られたことになる。

【49】
例えば実数の集合もそのような構造の一つである。
それはバラバラの数の集合ではなく、代数的には加減乗除の演算によって結びつけられた体であり、位相的には１次元の連続した空間でもある。
これは無数に存在し得る構造の一つに過ぎないが、客観的な世界の法則を探究する上では、最も強力な構造なのである。
だから最も早くから研究されてきたのであるし、その選択は正しかったと言える。
実数の他にもこれと異なる構造は無数にあり得るが、それらは研究の対象にはならなかった。
研究してもそれを適用する場合は一つもなかったからである。
数学者はヒルベルトによってどんな構造でも考え出して研究する自由を与えられはしたが、それを乱用しないできたと言える。

群――その２

【50】
歴史的にいって最も早くから登場してきた構造は群であろう。

それは、次のような公理を満足している記号の集合 G である。
（１）G の任意の２つの要素の組 a,b に対しては G のある他の要素 c が対応する。
これを関数の記号で表わすと、

f（a,b）＝ c

つまり G の要素を変数とする２変数の関数が定義されている。
（２）この f（a,b）は次のような条件を満足させる。
任意の３つの要素に対して

f（f（a,b），c）＝ f（a, f（b,c））

これを結合法則という。
（３）すべての a に対して f（a,e）＝ a， f（e,a）＝ a となるような e が存在する。
このような e を単位元という。
（４） すべての a に対して f（a,b）＝ e， f（b,a）＝ e となる b がただ１つだけ存在する。
このような b を a の逆元という。
以上のような条件を満足する２変数の関数 f（a,b）が集合 G の上で定義されているとき、G を群という。
つまり群というのは集合 G に f（a,b）がつけ加えられた１つの構造なのである。

【51】
これで確かに１つの構造であることはわかったが、それだけでは、このような群が数学全体は言うに及ばず、なぜ他の部門まで浸透して威力を発揮しているか、ということの説明にはならない。
そのためには群の実例をいくつかあげておく必要がある。
その前に、いちいち f（a,b）と書くのは面倒であるから、f（a,b）を簡単に ab と書くことにしよう。
これは乗法の形で書いているが、今のところ数の乗法とは関係はない。
このように書くと、上の条件は次のように書ける。
（２）任意の３つの要素に対して（ab）c ＝ a（bc）
（３）すべての a に対して ae ＝ a， ea ＝ a となるような e が存在する。
このような e を単位元という。
（４）すべての a に対して ab ＝ e， ba ＝ e となる b がただ１つだけ存在する。
このような b を a の逆元という。
このような b を a^{-1} と書く。
つまり a a^{-1} ＝ e， a^{-1}a ＝ e となるような a^{-1} である。

【52】
このような群 G の実例をいくつかあげてみよう。
正三角形の中心をピンで止めてそれを回転してみよう。
この正三角形を 120°だけ回転する操作を a， 240°回転する操作を b とする。
0°回転，つまり動かさない操作を e とする（図 13）。
ここで　　G＝｛e,a,b｝　とする。
ここで a を先にほどこして，その後で b をほどこした操作を ab で表わす。
このような操作は 360°回転になるから、何もしないのと同じで e である。

ab ＝ e

つまり、ab という乗法は２つの操作の連続施行を意味するのである。

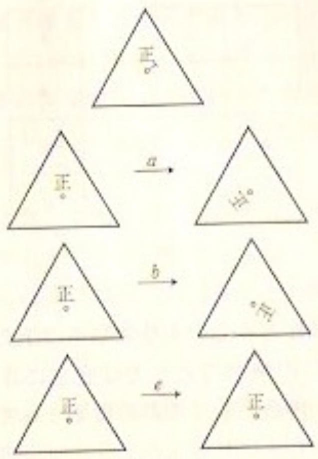


図 13

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

表 1

【53】
この３つの操作どうしの乗法の結果は上のような表（表１）になる。
この表で G の乗法のあり方は完全に決まってしまうので、この表が構造としての群の型をすべて決定してしまうのである。
この群は３個の要素からできている。
群の要素の個数をその群の位数という。
従ってこの群の位数は３である。

【54】
同じく正三角形を重ねるにしても裏返して重ねることを許すことにすると、操作の数は増える。
これは位数６の群になる（図 14）。
その群の乗法の表を作ると、表２のようになる。
この表を見ると、

　　af ＝ g,　fa ＝ h,　bf ＝ h,　fb ＝ g,　・・・

となって、順序を入れ替えると結果は違ってくることがわかる。
一般に群の乗法には交換法則は成立しない。

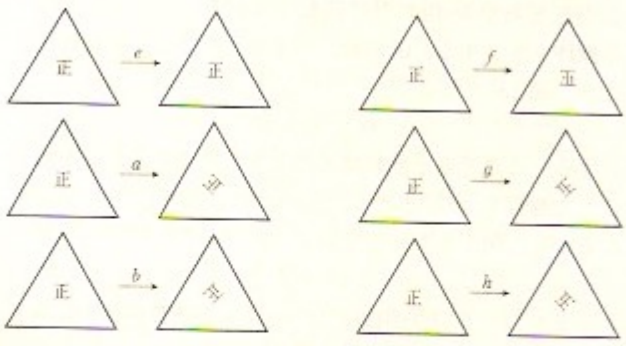


図14

	e	a	b	f	g	h
e	e	a	b	f	g	h
a	a	b	e	g	h	f
b	b	e	a	h	f	g
f	f	h	g	e	b	a
g	g	f	h	a	e	b
h	h	g	f	b	a	e

表2

この点が数の乗法と大変に違っているのである。

【55】
考えてみると、群の要素は操作なのだから行なう順序の先後によって違った結果が生じてくるのは当然であると言える。
化学の実験で、硫酸をうすめるとき、水に硫酸を入れていけば危険はないが、この順序を誤って硫酸に水を入れると危険になることをやかましく注意される。
これは順序を変更してはいけない例の１つである。
このような例を探せばいくらでもあるだろう。
料理などでも、「煮る」「焼く」「塩を入れる」・・・などの操作の順序をとり違えると、味のまるで違った料理ができる。
囲碁や将棋でも２つの手の順序を誤ったために勝敗が逆転することがしばしばある。
そういうことを考えると、操作の連続施行としての群の乗法は交換できないことが普通なのである。

【56】
もちろん群の中には乗法がすべて交換可能なものもある。
このような群を可換群もしくはアーベル群という。

アーベルというのはもちろん夭折したノルウェーの数学者Ｎ•Ｈ•アーベル（1802-1829）の名を記念するためにつけられたものである。
彼は可換群に関連して重要な研究を行なったからである。
初めにあげた位数３の群はアーベル群である。

置換群

【57】
操作という以上、操作そのものを考えるのだが、実はそれはむずかしい。
どうしても操作をほどこす何かのものがなければならない。
だからそれは何かを動かすという形を取ることが多い。
例えば、ある群の操作で動かされるものがｎ個の要素からなる集合であるとする。
そして、その集合は何の相互関係も持っていない無構造の集合であるとする。
それを 1,2,3,・・・, n という数字で表わすことにする。

$$M = \{1,2,3, \cdots, n\}$$

このｎ個の数字を入れ替える操作は全部でいくつあるかというと、それはもちろん、ｎ！個ある。
つまりｎ個の集合をかき回す操作の全体である。
これがｎ ＝ ３ のときは、３！＝ １・２・３ ＝ ６ で６個の操作がある。
それは次の６個である。
記号は上の数字を下の数字で置き替えるという意味である。

$$\begin{matrix}1&2&3\\1&2&3\end{matrix} = e, \quad \begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\end{matrix} = a, \quad \begin{matrix}1&2&3\\3&1&2\end{matrix} = b,$$

$$\begin{matrix}1&2&3\\1&3&2\end{matrix} = f, \quad \begin{matrix}1&2&3\\3&2&1\end{matrix} = g, \quad \begin{matrix}1&2&3\\2&1&3\end{matrix} = h,$$

このようにｎ個の数字もしくは文字を入れ替える操作の作る群を置換群という。
n＝４のときは、すべての置換はもちろん４！＝24 だけである。
このようにｎ個の数字もしくは文字のすべての置換の作る群を対称群という。
n＝４のときの対称群の位数はもちろん４！＝24 である。
しかし、1,2,3,4 という数字の並べ方に一定の条件をつけると、その条件を満たす置換の作る群はそれより小さくなる。

同型――その２

【58】
さて２つの群が同じ構造を持っていることを具体的に確かめるには、どうしたらいいのであろうか。
そのためにはまず、群の構造といっても、それは乗法の決め方の総体であるということを思い出そう。

G，G’という２つの群があったとき、２つの群の乗法の表（表１や表２に相当する表）が全く同じになったら同じ構造を持つと言ってもよいだろう。
つまりG，G’の要素の間にうまく１対１対応をつけて、乗法の結果もやはり対応しているようにできたらいいのである。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
G & = & \{a_1 & , a_2 & , \cdots, & a_i & , \cdots, & a_k & , \cdots, & a_l & , \cdots\} \\
 & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\
G' & = & \{a_1' & , a_2' & , \cdots, & a_i' & , \cdots, & a_k' & , \cdots, & a_l' & , \cdots\}
\end{array}
$$

上のような対応をつけて、Gの中の乗法が、そのままG’に持ち越されるとき、GとG’は同型であるという。

【59】
さて、群の同型ということはどのような意義を持っているだろうか。
例えばGが正三角形をそれ自身に重ね合わせる操作全体の群であるとすると、それは位数６の群になることを知った（図21）。

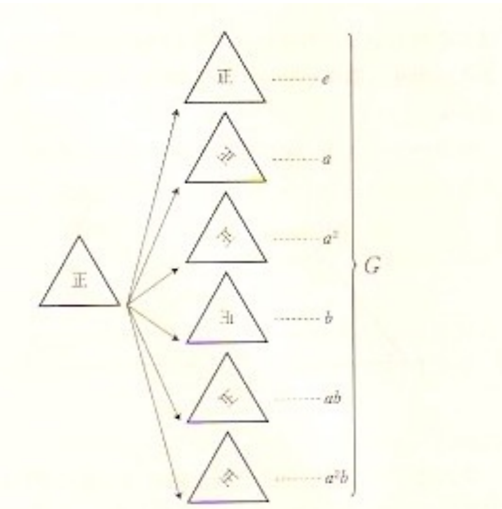
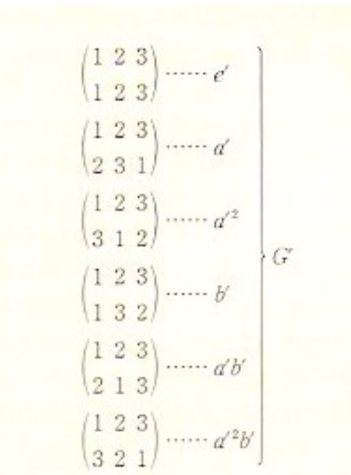


図21



一方G’は｛1，2，３ ｝という３つの数字を入れ替える操作の集まりであるとする。

このとき、GとG’とはそれらが「何に働くか」という観点から眺めるとまるで違ったものである。
一方は三角形の重ね合わせであり、一方は文字の入れ替えである。
しかしまた「何に働くか」という側面をしばらく不問にして、操作どうしの間の相互関係がどうであるかという点にだけ注目するなら、GとG’は同じ構造を持っている。
つまり同型であるということになる。
だから一見するとまるで無縁であると思われる２つの現象、もしくは研究対象の間に、意外な類似性、もしくは平行性があり得る。
それは２つの現象もしくは研究対象の根底にある群が同型であるという事実に由来することが少なくない。
例えば５次方程式を代数的に解くときに位数が 60 の群が現われてくるが、これは正 20 面体を自分自身に重ね合わせる操作全体の作る群――これを 20 面体群という――と同型である。
代数の５次方程式と幾何の 20 面体とでは一見何の関係もなさそうであるが、双方の背後に潜んでいる群が同型なのでその２つの間には深い親近性があることがわかってきた。
このような例は他にいくらでもある。
群というメガネを通してみると、意外に多くのものが同じ型の理論で捉えられるのである。

【60】
群の威力を初めて発見して、その重要性に気づいたのはガロア(1811-1832)であった。
彼は代数方程式に群を適用してめざましい成果をあげたが、その後、群は数学のあらゆる部門に浸透していった。
クラインは幾何学に群を応用して、これまでの幾何学に統一的な見方をもたらしたし、
ポアンカレとクラインは関数論に群を応用して保型関数論を作り出した。
このように群を数学のあらゆる部門に適用してみることは 19 世紀の数学者たちの課題の一つであった。

第二部
「数学の大統一に挑む」／エドワード・フレンケル著／を輪読研究して壮大な数学プロジェクトの意義を学ぶ

はじめに　隠されたつながりを探して

数学の世界で過去半世紀の間に生まれた最も重要なアイデアが、ラングランズ・プログラムだ。

大きくかけ離れて見える数学の各領域の間に、さらには量子物理学の世界にまで、胸踊る魅力的なつながりがあるという刺激的な予想だ。

【１】
すぐそこに秘密の世界がある。
美とエレガンスが生息する平行宇宙が、この宇宙と複雑に絡み合いながら潜んでいる。
それは数学の世界だ。
しかしほとんどの人は、その存在に気づいていない。

【２】
数学の魅力は、見てわかる美しさだけにあるのではない。
ガリレオは次の有名な言葉を残した。
「自然の法則は、数学の言葉で書かれている」。
つまり数学は、宇宙の姿を記述し、その仕組みを理解するための道具にもなるのだ。
数学は、自然を語るための普遍言語であり、真理を判定するための、信頼に足る標準を与えてくれる。
科学技術がますます力を増している現代世界において、数学はかつてないほどのスケールで力と富を生み、進歩の原動力になりつつある。
そうであってみれば、数学という新たな言語を自由に操れる者が、進歩の最前線に立つことになるだろう。

【３】
数学についてのありがちな誤解に、数学は所詮「工具セット」に過ぎないというものがある。
例えば、生物学者がフィールドワークをしてデータを集め、そのデータに合うような数学的なモデルを組み立てようとする場合は、数学は工具セットとして使われているケースだ（生物学者はそのモデルを作るために、数学者の力を借りることもあるだろう）。
確かにそれは、数学の使い方として重要なもののひとつではあるが、それがすべてではない。
数学は、それなしには考えることさえできない、パラダイムが変わるような大躍進を引き起こすこともあるのだ。

【４】
例えばアルベルト・アインシュタインは、物質が存在すれば空間が湾曲するということ、そしてその湾曲こそが重力であることを発見したが、その事実に気づいたとき、彼はデータに合う数式を探していたわけではなかった。
それどころか、そもそもそんなデータはまだ存在していなかったのである。
それまでは誰ひとりとして、空間が曲がるなどとは考えもしなかった。
誰もが当然のこととして、宇宙空間は平坦だと思い込んでいたのだ。
ところがアインシュタインは、重力と加速度とは等価だという洞察を組み込むことにより、自分の作った特殊相対性理論を一般化しようとする過程で、空間は曲がると考えざるを得ないと判断するに至った。
それは数学の領分に属する、きわめて高度な判断である。

【５】
アインシュタインは、そこに至るまでの道のりで、それより50年ほど前に、ベルンハルト・リーマンという数学者が成し遂げた仕事を利用した。
人間の脳は、二次元よりも高い次元の空間が曲がるのをイメージできるようには配線されていないため、高い次元の曲がった空間を調べようとすれば、数学を使わざるを得ない。
そしてアインシュタインの判断は正しかった。
われわれの宇宙空間は確かに曲がっているということ、それどころか宇宙全体が膨張さえしていることが、その後明らかになったのだ。
これが私のいう数学の威力である。

【６】
こうした例は枚挙にいとまがないし、物理学だけに限った話でもなく、他のさまざまな分野にも見出される（以下本書の中で、そのような例をいくつか見ていこう）。
歴史が示しているように、数学的概念は科学技術を加速度的に変貌させてきた。
当初はあまりにも抽象的で現実離れしているように思われた数学理論でさえ、のちにはいくつもの分野で必要不可欠なものになっているのだ。
チャールズ・ダーウィンの仕事は、最初は数学を利用していなかったが、彼はのちに自伝の中で次のように述べた。
「数学の見事な指導原理を、多少とも理解できるぐらいに勉強しておかなかったことを、私は深く悔いている。
なぜなら数学の素養のある人たちは、あたかも第六感のようなものを身につけているかに見えるからである」。
私はこれを、数学の大きな可能性を利用しなさいという、ダーウィンが後世に残した忠告と受け取りたい。

世界が違って見えてくる

【７】
子供の頃の私は、数学という隠された世界の存在を知らず、多くの人たちと同じく、数学は退屈でつまらない教科だと思っていた。
しかし私は幸運だった。
高校三年のときに出会ったプロの数学者が、数学という魔法の世界の扉を開いてくれたのだ。
そのおかげで私は、数学もまた詩や美術や音楽と同じように、エレガントで美しいということ、そして無限の可能性を持つことを知った。

さまざまな数学間に架け橋をかける

【８】
数学の知識は、他のいかなる知識とも異なっている。

物理的世界を見るわれわれの目は歪んでいる可能性が絶えずつきまとうのに対し、数学的真理は歪むということがない。
なぜなら数学的真理は、客観的で、時を超えた、必然的真理だからである。
数式や定理は、いつの時代にも、どこの誰にとっても、まったく同じ意味を持つ
——ジェンダーにも、宗教にも、皮膚の色にもよらず、今から千年後の人たちにとっても同じ意味を持つだろう。

【９】
数学には、情報に秩序を与えるという重要な機能がある。
情報の秩序こそは、ファン・ゴッホのタッチと、単なる絵の具のシミとを区別するものだ。
３Dプリンタの登場とともに、身の回りの世界は根底から変わろうとしている——あらゆるものが、物質の世界から、情報とデータの世界へと移行しつつあるのだ。
遠からず、３Dプリンタを使って、オンデマンドで情報を物質に転換できるようになるだろう。
それも今日のわれわれが、PDFファイルを書籍にしたり、MP３ファイルを音楽にしたりするのと同じぐらいの手軽さで。
その新しい世界においては、数学はこれまで以上に重要な役割を果たすことになるだろう。
なぜなら数学は、情報を組織化して秩序づけるための手段としてだけでなく、情報を物質に転換させるための手段としての役割をも担うことになるからだ。

【10】
私は、数学の分野で過去50年の間に生まれた、最も重要なアイデアのひとつについて話すつもりである。
そのアイディアとは、多くの人たちが数学における大統一理論と見なしている、ラングランズ・プログラムである。
代数、幾何学、数論、解析という、大きくかけ離れて見える数学の領域の間に、さらには量子物理学の世界にまで、胸躍る魅力的なつながりがあるという刺激的な予想、それがラングランズ・プログラムだ。
これらの領域が、数学という隠れた世界の大陸だとすれば、ラングランズ・プログラムは、大陸から大陸へとわれわれを瞬時に移動させてくれる、究極のテレポーテーション装置のようなものである。

【11】
ラングランズ・プログラムは、1960年代に、ロバート・ラングランズによって提唱された考えだ。
ラングランズは1972年以来、プリンストンの高等研究所で、かつてアルベルト・アインシュタインの就いていたポストを占めてきた数学者である（現在は名誉教授）。
そしてそのラングランズ・プログラムの基礎を打ち立てたのは、それより一世紀以上前のフランスに生きた、（ガロアという）ひとりの神童だった。
やがてその理論は、もうひとつの驚くべき発見により、豊かな内容を与えられた。
（すなわち）1967年、ラングランズはガロア群の理論と、調和解析と呼ばれる数学の分野とをつなぐ革命的な洞察を得た。

これら二つの領域は、何光年も離れているように見えるにもかかわらず、実は密接につながっていたのである。

【12】
ラングランズの発見はフェルマーの最終定理の証明へと続く道を切り開いたばかりか、数や方程式に関するわれわれの考えに革命を起こした。
さらにもうひとつ、数学には不思議なアナロジーやメタファーに彩られた、ロゼッタストーンのようなものが存在するという深い洞察が得られた。
それらのアナロジーを、あたかも数学という魔法の国を流れる小川のようにたどることにより、ラングランズ・プログラムは、幾何学の領域へ、そして量子物理学の領域へと流れ込み、一見すると混沌とした世界に秩序とハーモニーを生み出しているのである。

【13】
私がこんなことを話したいと思うのは、人目にはめったに触れることのない、数学のいくつかの側面を浮かび上がらせたいと思うからだ。
その側面とは、インスピレーション、深い思想、そして啓示のように降りてくる新知識である。
また数学は、因習の壁を打ち壊す手段ともなり、真理を探究したいという自由なイマジネーションの表出でもある。
無限についての理論を作り出したゲオルク・カントールは、次のように述べた。
「数学の本質は、その自由性にある」。
数学はわれわれに、この世界を正確に分析し、その結果を吟味し、そうして明らかになった事実が指し示すところへ、どこまでも進むという態度を身につけさせてくれる。
そしてドグマと偏見からわれわれを解放し、新しい道を切り開く力を与えてくれる。
そうすることで数学は、数学という分野それ自体をさえ乗り越えるための道具になるのである。

【14】
数学の道具は、良いことにも悪いことにも使えるため、われわれは数学が実社会に及ぼす影響にも注意を怠らないようにしなければならない。
例えばグローバルな経済危機は、数学的な経済モデルが、妥当な適用範囲を超えて金融市場に当てはめられてしまったことが大きな原因となっている。
経済について意思決定をする立場にある人たちの多くは、数学的リテラシーを持たず、それゆえ経済理論を十分に理解していないにもかかわらず、思い上がって――そして強欲につき動かされて――それらの理論を市場に当てはめ、ついには経済システム全体をほとんど破壊するに至ったのだ。
彼らは不当にも、情報へのアクセス権をほぼ独占しているし、その他の人たちは、経済モデルの当否を問うことさえしない。
もしもより多くの人たちが、金融市場の数学的モデルと経済システムの仕組みを、もう少しきちんと理解していたなら、これほど長きにわたって騙され続けることはなかっただろう。

【15】
もうひとつ例を挙げておこう。
1996年のこと、アメリカ政府に任命された委員会は、秘密裏に、消費者物価指数を算出する式を変更した。
消費者物価指数は、課税区分、社会保障、メディケア、物価スライド方式の支払いなどを決定するために使われるもので、インフレーションの目安にもなるものである。
何千万人ものアメリカ人がその変更の影響を受けることになるにもかかわらず、その新しい式と、それが及ぼす影響について、公開での議論が行われることはほとんどなかった。
また、もっと最近になって、アメリカの経済に大きな影響を与えるその複雑な計算式を、不正に操作しようという動きがあった。

【16】
数学的リテラシーのある社会なら、こんな裏取引はずっと減るに違いない。
数学を数式で表すとすれば、〈（厳密性＋知的健全性）×事実への信頼 〉となるだろう。
だからこそ、みんなが数学の知識を持たなければならないと思うのだ。
そしてわれわれは、権力を握る一握りの人たちの恣意的な決定から身を守る道具を手に入れなければならない。
数学のないところに、自由はないのである。

この本は数学の知識がなくとも理解できるように書いた

【17】
美術や文学、そして音楽などと同じく、数学もまたわれわれの社会の文化的伝統である。
われわれ人間は、新しいものを発見したい、新しい意味に手を伸ばしたい、そして宇宙をよりよく理解し、宇宙の中での人間の位置を理解したいという願望を持っている。
残念ながら、もはやコロンブスのように新しい大陸を発見することも、月に最初の足跡を残すこともできなくなってしまった。
しかし、大海原を船で渡ったり、驚くべき発見をするために宇宙空間に飛び出したりしなくても、新しい世界が開かれるとしたら？
謎は、今このとき、われわれの目と鼻の先で、この宇宙と絡み合いながら存在している。
その謎は、ある意味では、われわれの内側にあるとも言えよう。
数学は、宇宙に対してどう動くべきかを指示し、宇宙の形状や湾曲を背後から制御し、小さな原子から大きな星まで、あらゆるものを支配しているのである。

【18】
たいていの人は、たとえ物理学や生物学の講義を受けたことがなかったとしても、太陽系や、原子や、素粒子や、DNAの二重螺旋のことを聞いたことはあるし、それらについて大まかな知識は持っている。
これらの概念はわれわれの文化の一部だとか、みんなの意識に組み込まれているとか言われても、誰も驚きはしないだろう。
それと同じく、適切に説明してもらいさえすれば、数学の重要な概念や思想を理解することは誰にでもできる。

問題は、惑星やDNAなどは年中話題にのぼるのに対し、対称群や、２＋２が４にならない算術体系や、リーマン面のような美しい幾何学図形など、現代数学の魅力的なアイディアについては誰も教えてくれないことだ。

旧ソ連で数学を学ぶことについて

【19】
旧ソ連の抑圧的な体制のもと、数学は自由を求める気持ちのはけ口になっていた。
ソ連の差別的政策のために、私はモスクワ国立大学に入学することができなかった。
この大学は、私の目の前で門を閉ざしたのだ。
しかし私は諦めなかった。
モスクワ大学に忍び込み、講義やセミナーを聞いた。
数学の本を独習し、しばしば夜遅くまで読みふけった。
そうして私は、ソ連の体制にハッキングした。
正面から入れてくれなかったから、窓から飛び込んでやったのだ。
そんな私を守り導いてくれたのは、二人の優れた数学者だった。
彼らの導きがあったからこそ、私は数学研究に踏み出すことができた。
そのとき私はまだ学部の学生だったが、無名という壁を乗り越えつつあった。
あれは私のこれまでの人生の中で、最も波瀾万丈な時期だった。
差別的な政策のせいで、ソ連では数学を職業にすることはできないとわかっていても、私は数学をやめなかったのだ。

【20】
しかし、驚くべき出来事が待ち受けていた。
最初に書いた論文がどうにかソ連を出て、外国の数学者たちに読んでもらえたおかげで、21歳のとき、私は客員教授としてハーバード大学に招かれたのである。
奇跡的にもまさにそれと同じ時期に、ソ連ではペレストロイカが鉄のカーテンを引き上げ、人々は国外に出られるようになった。
その後研究者としての道を歩むうちに、ラングランズ・プログラムの最前線にたどり着き、過去２０年間にこの分野で起こった大きな進展のいくつかに参加することができた。
本書の中で、この分野の目覚ましい成果について紹介し、その舞台裏で起こったことを語ることにしよう。

第1章　人はいかにして数学者になるのか？

旧ソ連のロシアに生まれた私は、量子物理学者になりたかった。
クォークを発見した物理学者のゲルマン。
でも、ゲルマンはなぜ、それを発見できたのだろう。
「そこにはきみの知らない数学がある」。
両親の古い友人の数学者が言ったのだ。

なぜ8と10であって、７と11ではないのか？

【21】
人はいかにして数学者になるのだろうか？
私の場合はどうだったのか。
意外に思われるかもしれないが、私は学校の数学が嫌いだった。
「嫌い」はちょっと言い過ぎかもしれないが、むしろ、好きではなかった。
心から面白いと思えたのが物理学、特に量子物理学だった。
そこで私は一般向けの物理の本を、手当たり次第に読みあさった。
私が生まれ育ったロシアでは、そのたぐいの本は容易に手に入ったのだ。

【22】
私は量子の世界に心を奪われた。
古代から今日に至るまで、科学者や哲学者は、宇宙の基本的な性質を明らかにすることを夢見てきた――あらゆる物質は、原子と呼ばれる小さな塊からできているという仮説を立てる者さえいた。
20世紀の初めになって、原子は確かに実在することが示されたが、まさにそれと同じ頃に、原子は一層小さな要素から構成されていることが明らかになった。
原子は、中心にある原子核と、原子核の周りを軌道運動する電子からできていたのである。
そしてその原子核は、さらに小さな要素――陽子と中性子――から構成されていることが示された。

【23】
では、陽子と中性子はどうなのだろう？
私が読んだ一般向けの本には、陽子と中性子は、「クォーク」と呼ばれる素粒子からできていると書いてあった。
特に、この名前がつけられた経緯が面白かった。
クォークを考えついた物理学者のマレー・ゲルマンは、ジェームズの『フィネガンス・ウェイク』という作品から、この名前を取ったというのだ。
私は、科学以外にもいろいろなことに興味があったので、ノーベル賞を受賞した偉大な物理学者のゲルマンが、幅広い分野に（文学だけでなく、言語学、考古学など多くの分野に）興味があると知って、私はとても嬉しかった。

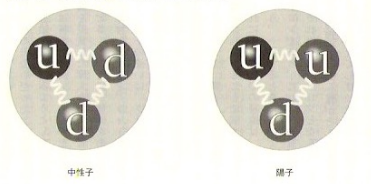
【24】
ゲルマンによると、クォークには、「アップ」と「ダウン」という二つのタイプがあり、中性子と陽子の違いは、クォークの組み合わせの違いから生じているということだった。
中性子は二個のダウン・クォークと一個のアップ・クォーク、陽子は二個のアップ・クォークと一個のダウン・クォークからできている。
この説明はとても分かりやすかったが、分からないこともあった。
物理学者たちは一体どうやって、陽子と中性子は、それ以上分割できない素粒子ではなく、より小さな要素から構成されていることに気づいたのだろうか？

【25】

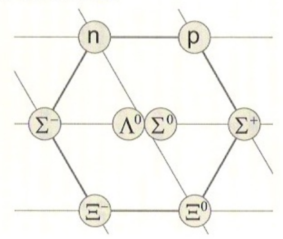
それに気づくまでの経緯は、次のようなものだったようだ。
1950年代の末に、ハドロンという、一見すると素粒子のように見える粒子がたくさん発見された。
中性子と陽子はともにハドロンであり、これらは物質の構成要素として、この世界で重要な役割を果たしている。
しかしそれ以外のハドロンとなると、そもそもなぜそんな粒子が存在するのかも分からなかった。
ハドロンの種類があまりにも増えてしまったので、有力な物理学者ヴォルフガング・パウリは、それを皮肉って、物理学は植物学になってしまったと言った。
物理学者たちは、たくさんのハドロンを統一的に説明しようと躍起になった。
ハドロンの振る舞いを支配し、これほど多くの種類がある理由を説明してくれる、基本原理を見出す必要があったのだ。

【26】
ゲルマンと、たまたま同時にユーヴァル・ネーマンは、新しい分類の枠組みを提案した。
二人はともに、ハドロンは8個と10個の粒子を含む、二つの小さな族（ファミリー）に自然に分かれることを示したのである。
それぞれの族に含まれる粒子は、よく似た性質を持っていた。
当時私が読んでいた一般向けの本に、８個のハドロンを含む図が載っていた。
その図では、陽子はp、中性子はn、それ以外の６個の粒子には、ギリシャ文字で表される奇妙な名前がついている。

〔図1-2〕 中性子と陽子は３つのクォークでできている



〔図1-3〕 謎めいたハドロン八重項



【27】
しかし、なぜ８と10であって、７と11ではないのだろう？
当時読んでいた本には、それに対する明快な説明は見出せなかった。
ただ、ゲルマンが「八道説」と呼んだ、謎めいた考えのことが書いてあった（この名前の背景には、仏陀が修行の基本として説いた「八正道」という教えがあるのだという）。
しかし、その考えがどういったものなのかは、どこにも説明されていなかったのだ。
それが説明されていないことが、私には不満だった。
一番重要なところが隠されていたのだから。
私はその謎を解きたかったが、どうすればいいのか分からなかった。

【28】
幸い、家族ぐるみのつき合いのあった人物が力を貸してくれた。
私は当時15歳になったばかりで、ロシアでいう9年生だった──あと2年足らずに、高校卒業だ（私は6年生を飛び級していたので、クラスメートたちよりも一つ年下だった）。
私の郷里のコロムナという町にある単科大学の教授であるエフゲニー・エフゲニエヴィ・ペトロフという数学者の研究室に行くと、彼は私にこう尋ねた。
「君は量子物理学に興味があるそうだね。
ゲルマンの八道説とクォーク・モデルのことは知っているかな？」
「はい、それについてはいくつか一般向けの本を読みました」
「では、このモデルの基礎はどこにあるか知っているかね？
ゲルマンはどうやってこんなモデルを思いついたんだろう？」
「ええと、それは・・・」
「SU(3)という群のことは聞いたことがあるかね？」
「エスユー・・・なんです？」
「SU(3)のことを知らずに、クォーク・モデルを理解することはできないよ」

【29】
「君はきっと、学校で教わっているのが数学だと思っていたんだろうね」と、エフゲニー・エフゲニエヴィチ。
「でもそうじゃないんだ」と言った。
そして本の中の数式を示して、「数学とはこういうものなんだよ」と続けた。
「量子物理学を本当に理解したいのなら、まずこれをやらなくては。
ゲルマンは美しい数学理論を使ってクォークを予言したんだよ。
彼の発見は、数学的な発見だったんだ」
「でも、どこから始めたらいいのか」
その世界はちょっと恐ろしげに見えた。
「心配はいらないよ。
君はまず、対称群というものを学ばなくてはならない。
それが基本なんだ。
理論物理学もそうだが、数学のかなりの部分も、対称群が基礎になっている」
彼は対称群に関する本を一冊と、別のテーマの本を二冊くれた。

第２章　その数学がクォークを発見した

その両親の友人の数学者は、クォークの発見に、対称性とは何かを記述する「群」という数学が関係していたことを私に教えた。
観察ではなく、理論によって何かの存在を予想する。
それは数学にしかできない。

シンメトリーのエッセンス

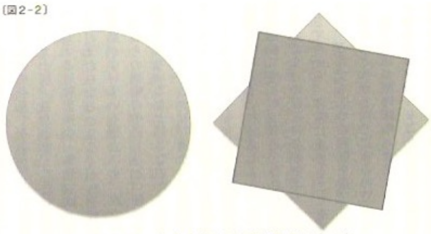
【30】
対称性とは何だろうか？
誰でも直感的にはそれを知っている――見ればそれとわかるのだ。
対称性を持つ物体の例を上げろと言われれば、蝶や、雪の結晶や、人体などを挙げるだろう。
エフゲニー・エフゲニエヴィチは、対称性を次のように説明してくれた。
彼は研究室にある二つの机を指差して、こう言った。
「丸い机と正方形の机の、どちらがより対称的だろうか？」
「もちろん丸い方です。明らかでしょう？」
「そうだね。でもなぜだろう？
数学者になるということは、“明らか”で片づけてしまわずに、論理的な理由を与えようとすることなんだ。
どう転んでも明らかに思われる答えが、実は間違いだとわかって驚くなんていうのは、毎度のことなんだよ」

【31】
エフゲニー・エフゲニエヴィチはヒントをくれた。
「丸い机を四角い机よりも対称的にしているのは、どんな特徴だろう？」
私はしばらく考えて、あることを思いついた。
「物体が対称的だというのは、その物体を動かしても、形や向きなどが変わらないことと関係があるのでは？」
「その通り。では、これら二つの机の形や状態を変えない動かし方には、どんなものがあるだろう？
そんな動かし方を全部挙げてみよう」と彼は言った。
「丸い机の場合は・・・」
そこで私が口を挟んだ。
「中心のまわりの回転ならどんな角度で回しても、見た目は変わりません。
でも、正方形の机を勝手な角度で回転させれば、たいていは向きが変わってしまう。
正方形の机が前と変わらないのは、90度か、その整数倍の角度で回転させた場合だけです」
「その通り！　君に1分間ほど部屋の外に出てもらって、その間に私が丸い机をある角度だけ回転させても、君はその変化に気づかないだろう。
しかし同じことを正方形の机にしたとすれば、その回転角が、90度、180度、270度でない限り、君は変化に気づくだろう」

【32】
そして彼はこう続けた。
「そんなふうに、見た目を変えない操作のことを、対称変換と言う。
つまり、正方形の机には、対称変換が四つ（福永注：90°180°270°360°＝0°）しかないのに対し、丸い机にはもっとたくさんある――実を言えば、無限にたくさんあるんだ。
丸い机の方がより対称的だというのはこのためだ」
私はなるほどと思った。
「こんなことぐらいは数学者でなくたって理解できる。
でも、もし君が数学者なら、次のような疑問を持つだろう。

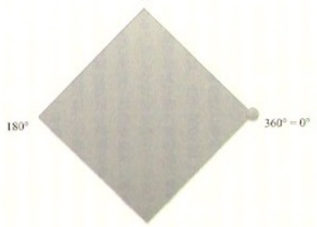
与えられた物体の対称変換として可能なものすべてを集めたものは、どんな性質を持つだろうか？」

〔図2-2〕



丸い机をどんな角度で回転させても状態は変わらないが、
正方形の机を90度の整数倍以外の角度で回転させると、
向きが変わる（どちらの机も、上から見たところを示した）。

〔図2-3〕



【33】
正方形の机を見てみよう。
その対称変換は、机の中心のまわりの四つの回転だ――反時計回りに、90度、180度、270度、そして360度である。

（注：時計回りの回転を考えても、同じ回転の組が得られる。例えば、時計回りに90度の回転をほどこすことは、反時計回りに270度の回転をほどこすことに等しい。数学者は普通、反時計回りを考えるが、これは単にそうすることを選んだというだけで、どちらでも構わない）。

数学者はこれを、正方形の机に対する対称変換の「集合」は、90度、180度、270度、360度に対応する、四つの元からなるという。
それぞれの回転は、どれかひとつの頂点を、四つの頂点のどれかに重なるところまで移動させる操作である。
これらの回転の中に、ひとつ特別なものがある。
360度の回転は、0度の回転、つまり回転させないことと同じなのだ。
360度の回転は、対象に対して何もしないのと同じことなので、これは特別な対称変換である。
この操作をほどこすと、机の各点は、前の同じ位置に戻る。
このような変換を、「恒等変換」という。

３60度よりも大きな角度での回転は、0度から360度までの、どれかの角度の回転に等しくなることに注意しよう。
普通、われわれが回転を考えるときには、0度から360度までの角度しか考えないのはこのためだ。

非常に重要なことを述べよう。

四つの角度の回転、｛90°，180°，270°，360°｝の中から、どれでも二つの回転を選び、それらを正方形の机に引き続き施した結果は、これら四つの回転のどれかと同じになるのである。
二つの回転操作を引き続いて施した結果を、最初に選んだ二つの回転の「合成」という。

もちろん、こんなことは当たり前だとも言える。
任意に選んだ二つの対称変換はどちらも正方形の机を変化させないのだから、それらを合成したものも机を変化させないだろう。
したがって合成された結果の操作も、やはり対称変換であるはずだ。
例えば、正方形の机を90度回転させてから、引き続き180度回転させたとすれば、その結果は270度の回転になる。
もうひとつ例を挙げると、

　90°＋　270°＝　0°

となる。
つまり、90度回転させてから、さらに270度回転させれば、360度の回転になるが、先に述べたように、360度の回転は0度の回転と同じなのだから、この変換は「恒等変換」である。

言い換えれば、270度回転させた二番目の操作は、最初の90度の回転を、なかったことにするのだ。
実はこれが、とても重要な性質なのである。
どんな対称変換も、なかったことにできる。

つまり、任意の対称変換Sに対して、それと合成した結果が恒等変換になるような、別の対称変換S'が存在するということだ。
このS'のことを、対称変換Sの「逆元」という。
したがって270度の回転は、90度の回転の逆元である。
同様に、180度の回転の逆元は、同じく180度の回転である。

【34】
以上の話から分かるように、正方形の机の対称変換の集合という、一見すると非常にシンプルなもの——たった四つの回転の集まり｛90°，180°，270°，0°｝——が、いくつもの内部構造を持っている。
その内部構造は、この集合のメンバーが相互作用するときのルールだ。

第一のルールは、任意の二つの対称変換を合成できるということ（つまり、ある回転操作に続いて、もうひとつの回転操作をほどこせるということ）。

第二のルールは、恒等変換という、特別な対称変換が存在すること。
今の場合、恒等変換は0度の回転である。
恒等変換を、それ以外のどんな対称変換と合成しても、はじめの対称変換に戻る。
例えば、

　90°＋　0°＝　90°
　180°＋　0°＝　180°

という具合に。

第三のルールは、任意の対称変換Sに対して、その合成が恒等変換になるような対称変換S'が存在するということ。
このS'は、もとの対称変換Sの逆元である。

今挙げた三つのことは、とても重要だ。
なぜなら、これら三つの構造を持つ回転の集合は、数学者が「群」と呼ぶものの一例になっているからである。

【35】
正方形の机以外のどんな物体でも、その物体の対称変換の集まりは、群になっている。
一般には、元の数は四つよりも多い。
無限にたくさんの元を持つこともある。

これまでの話を、丸い机の場合に当てはめてみよう。
丸い机に対する対称変換をすべて集めた集合が、あらゆる回転の集合であることはすぐに分かるだろう(正方形の机の場合とは異なり、90度の整数倍の角度の回転だけに限らない)。
その回転の集合を、ひとつの円周上のすべての点からなる、点の集合としてイメージしてみよう。

円周上の各点は、0度から360度までのどれかの角度の回転に対応する。
その角度だけ、反時計回りに、丸い机を回転させるのだ。
特に、0度の回転に対応する特別な点が存在する。

先に述べた三つの構造が、この円周上の点の集合にも当てはまるかどうか調べてみよう。
第一の構造については、二つの回転の合成――角度ϕ_1とϕ_2の回転としよう――は、角度$\phi_1+\phi_2$の回転となる。
もしも$\phi_1+\phi_2$が360度よりも大きければ、そこから360度を引けばよい。
数学ではこれを、360を「法」とする「加法」という。

例えば$\phi_1=195$ ，$\phi_2=250$ なら、これら二つの角度の和は445度で、445度の回転は、85度の回転と同じである。
したがって丸い机の回転群では、

$$195^\circ + 250^\circ = 85^\circ$$

という計算が成り立つ。

第二に、円周上には、0度の回転に対応する特別な点が存在する。
それがこの群の単位元である。

第三に、反時計回りにϕ度の回転に対する逆元は、反時計回りに（$360-\phi$）度の回転、あるいは同じことだが、時計回りにϕ度の回転である。

こうして、丸い机の回転群が記述された。
それを「円周群」と呼ぼう。
四つの元しかなかった正方形の机の対称群とは、円周群には、無限にたくさんの元がある。

なぜなら、0度から360度までの間には、無限にたくさんの角度があるからだ。

【円周群：任意の丸い対象（例えば丸い机）の回転からなる群。この群は、特別な一点（単位元）を持つ円周である。円周群は、リー群の最も簡単な例である。】

【36】
こうして今やわれわれは、物体の対称性についての直感的な理解を、堅固な理論的基礎の上に置いた――対称性についての直感的理解を、ひとつの数学的概念にしたのである。

そのためにわれわれはまず、与えられた対象の対称変換とは、その対象の特徴を変えない操作であると定義した。

そして次に、決定的に重要な一歩を踏み出した。
与えられた対象に対する、あらゆる対称変換の集まりに注目したのだ。

正方形の机の場合であれば、それは四つの元（90度の倍数の回転）からなる集合である。
丸い机の場合には、それは無限にたくさんの元からなる（つまり円周上のすべての点を元とする）無限集合となる。

そして最後に、対称変換の集合には必ずそなわる、三つの簡単な構造を記述した。

第一の構造は、任意の二つの対称変換を合成したものは、その集合の別の対称変換になること。

第二の構造は、単位元となる特別な対称変換が存在すること。

そして第三の構造は、それぞれの対称変換について、逆元が存在することだ。

（注：もうひとつ、対称変換の合成が満たすべき、「結合法則」という重要な性質がある。
三つの対称変換 S、S’、S”が与えられたとして、
それらを（S ο S’）ο S” と S ο（S’ ο S”）という異なる二つの方法で合成する。
これら二つは同じ結果を与える。この性質は、正式な群の定義に入っている。
しかし、われわれの扱う例においては、この性質は明らかに成り立つので、本文ではあえて触れなかった。）

【37】
こうしてわれわれは、数学的な群の概念に到達した。
対称変換の群は、出発点となった具体的な対象とは異なる、抽象的な数学的対象である。
机の対称変換からなる集合には、触ることも、持ち上げてみることもできない。
しかしわれわれはその群をイメージしたり、その元を図示したり、その性質を調べたり、議論したりすることができる。
抽象的ではあるが、その集合に含まれる元には、具体的な意味があるのだ。
それぞれの元は、具体的な対象に対してほどこされる変換――対称変換――を表している。

数学とは、こうした抽象的な対象と概念とを調べる学問なのである。

ひっくり返すということ

【38】
経験が教えるところによれば、対称変換は、自然法則にとってなくてはならない指導原理である。
例えば、雪の結晶が美しい六角形になるのは、この形が結晶化した水分子の最低エネルギー状態に対応し、分子は強制的にその配列にさせられるからだ。
雪の結晶の対称変換は、60度の倍数――60度、120度、180度、240度、300度、360度（これは0度と同じ）――の回転である。

雪の結晶にはそのほかにも、これらの角度に対応する直線についての反転（ひっくり返す）という対称変換がある。
こうした回転と反転の操作をほどしても、雪の結晶の形や向きは変わらないので、これらは雪の結晶の対称変換なのである。

（注：机をひっくり返すという操作は、机の対称変換になっていないことに注意しよう。これをやると、机は上下ひっくり返る――そして、机には脚がある。単なる（足のついていない）正方形や円を考えるなら、反転は確かに対称変換になっている。そういう図形の場合、対称群には反転を含めなければならない。

【39】
蝶の場合には、ひっくり返すと、蝶のおなかと背中が入れ替わる。
蝶はおなかの方に脚があるので、厳密には、ひっくり返す操作は、蝶の対称変換ではない。
蝶は反転について対称的だというとき、われわれは理想化された――おなかと背中が全く同じ――蝶を考えているのである（現実の蝶はそうなっていない）。
理想化された蝶では、ひっくり返すことによって左右の羽を入れ替える操作は、ひとつの対称変換となる（ひっくり返すという操作の代わりに、蝶の左右の羽を入れ替える操作をイメージしてもよい）。

【40】
蝶の例から、ひとつの重要な事実が浮かび上がる。
自然界には、近似的な対称性しか持たない物体がたくさんあるということだ。
現実の机は、完璧に丸いわけでも、完璧に正方形なわけでもないし、生きている蝶は、おなかと背中が完全に同じではなく、人体もまた、右と左が完全に同じではない。
しかしそういう場合でも、それらを抽象化し、理想化したもの――数学的なモデル――を考えることは役に立つ。
完璧に丸い机や、おなかと背中の区別がつかない蝶を考え、そういう理想化されたものの対称変換について調べる。
そして、その結果から何らかの結果を引き出す段階になったら、現実の対象と、そのモデルとの違いを考慮に入れればよい。

完璧ではないからといって対称性に気づけないわけではない。
近似的にでも対称性を持つ物体を見れば、われわれはそれが対称的だと思うし、そこに美しさを感じることも多い。

しかし、数学的な対称変換の理論にとって重要なのは、美しいかどうかではない。
数学的な理論にとって重要なのは、直感的な対称性をできる限り一般化して——そしてできる限り抽象化して——対称変換という概念として定式化することにより、幾何学、数論、物理学、化学、生物学など、幅広い分野で統一的に利用できるようにすることなのだ。

【41】
いったん一般的な理論を作ってしまえば、お好みならば対称性を創発的現象とみなし、対称性の破れのメカニズムについて語ることもできる。
例えば素粒子は、いわゆるゲージ対称性が破れることによって質量を獲得する。
その対称性の破れを引き起こしているのが、ヒッグス粒子だ——この粒子は、長年にわたり探索の手を逃れてきたが、最近ついて、ジュネーブの地下にあるLHC（大型ハドロン衝突型加速器）で発見された。
こうして対称性の破れのメカニズムを調べることにより、自然界の基本構成要素の振る舞いについて、きわめて重要な洞察が得られるのである。

数学には三つの特徴がある

【42】
ここで、抽象的な対称変換の理論が持つ基本的な特徴を、いくつか指摘しておこう。
なぜならそれらの特徴が、数学がなぜ重要なのかを示すための具体例になるからだ。

ひとつ目の特徴は、「普遍性」があることだ。
円周群は、丸い机の対称変換の群であるだけでなく、コップやビンや円柱など、あらゆる丸い物体の対称変換の群である。

それどころか、ある物体を「丸い」と述べることは、その物体の対称変換の群は円周群であると述べることに等しい。
これはとても重要なことである。
というのもそれは、ある物体の対称群（ここでは円周群）を指定することにより、その物体の重要な属性（「丸い」ということ）を記述できるということだからである。

二つ目の特徴は、「客観性」があることだ。
例えば、群という概念は、われわれがそれをどのように解釈するかに左右されない。
群は、それについて学ぶすべての者にとって、同じものを意味するのである。
デカルトの「われ思う。故にわれあり。」という言葉は、いったん言葉として理解してから、さまざまに解釈することができる。
また、どの解釈が正しいのかについて、人によって意見が異なることもあるだろう。
それとは対照的に、論理的に矛盾のない数学の命題は、解釈によって意味が変わるということがない。

さらに、それが真かどうかは客観的である（一般に、ある命題が真であるかどうかは、考慮している公理系に依存する。しかしその場合でも、公理系に依存するというその性質は、客観的である）。
例えば、「丸い机の対称変換の群は円周群である」という命題は、誰にとっても、いつの時代も、真なのだ。
言い方を換えれば、数学的真理は、いつでもどこでも誰にとっても、真理でなければならないということだ。

三つ目は、客観性と密接に関係しているが、数学的理論には「耐久性」があることだ。
ピュタゴラスの定理が、古代ギリシャ人にとっても今日のわれわれにとっても同じであることはほとんど疑う余地がないし、未来社会の誰にとっても同じだと考えることには十分な根拠がある。
同様に、この本の中でこれから見ていく真の命題は、永遠に真であり続けるだろう。

【43】
普遍的で、客観的で、耐久性のある知識が、こうして確かに存在しているということ——しかも、それがわれわれみんなのものであること——は、ほとんど奇跡のように思われる。
そんな特徴をもつ数学的概念は、物理的世界や心の世界とは切り離された、別の世界にあるのではないだろうか？
その世界のことを、数学のプラトン的世界と言うことがある。
それがどんな世界なのかはまだよく分かっていないし、数学的発見に向かってわれわれを駆り立てているものが何なのかも分からない。
しかし、その隠れた世界——目に見えない数学のプラトン的世界——は、われわれの暮らしの中で——特にコンピュータ・テクノロジーと3Dプリンタの到来とともに——ますます大きな役割を演じるようになっている。

【44】
数学的理論の4つ目の特徴は、それが物理的世界にとって「意味を持つ」ということだ。
例えば、過去50年間に量子物理学が大きく進展したのは、対称変換という数学的概念を、粒子と、それらの間の相互作用に応用したお陰だった。
この観点からすれば、電子やクォークのような素粒子は、丸い机や雪の結晶のようなもので、それらの振る舞いはかなりの程度まで対称性によって決まる（物理的対称性の中には、厳密に成り立つものもあれば、近似的にしか成り立たないものもある）。

クォークの発見にいたる数学的洞察とは？

【45】
クォークの発見は、数学的理論が物理学に果たす役割を見るためには、うってつけの例である。
エフゲニー・エフゲニエヴィチにもらった本を読んだわたしは、ゲルマンとネーマンによるハドロンの分類の基礎となるのが、「対称群」であることを知った。

それは、すでに数学者たちによって調べられていた群だった――この群について調べた数学者たちは、原子以下の粒子と、彼らの調べている数学理論との間に関係があろうとは夢にも思っていなかった。
その群に与えられた数学的な名前は、特殊ユニタリー群であり、普通はそれをSU(3)と表記する。
Sはspecial、Uはunitaryの頭文字である。
この群には、球の対称変換の群とよく似た性質がある。

【46】
数学者たちは、SU(3)という群の、「表現」を研究していたのだった。
ここで表現というのは、SU(3)という群に、対称群としての具体的な体裁を与えることで、そのためには何通りもの方法がある。

ゲルマンとネーマンは、それら表現の構造と、彼らが見出したハドロンのパターンとの共通性に着目した。
そして二人はその知識を、ハドロンの分類に利用したのだった。

【47】
数学では、「表現」という言葉を、かなり特殊な意味で使っている。
まずひとつ例を挙げよう。
丸い机の回転群、すなわち円周群を思い出そう。
そして、机の上面をあらゆる方向に、無限の彼方まで拡張することをイメージしてほしい。
こうして得られるのが、「平面」という抽象的な数学的対象である。
さて、無限に拡張された机の上面を、机の中心のまわりに回転させると、その同じ点のまわりで平面が回転する。

これにより、無限に広がる平面の対称変換を、円周群の元（回転）に対応させるルールが得られたことになる。
逆に言えば、円周群の各元が、平面の対称変換で表現されたことになる。
数学者がこの対応づけのプロセスを、群の「表現」と呼ぶのはこのためだ。

さて、平面は二つの座標軸をもち、それゆえ平面上の各点は二つの座標を持つ。
したがって平面は二次元である。
このことを、回転群の「二次元表現」を作ったと言う。
それは単に、回転群の各元に対して、平面の対称変換としての体裁を与えたと言っているに過ぎない。

【48】
二次元よりも大きな次元を持つ空間もある。
例えば、われわれのまわりの空間は三次元である。
三次元空間には三つの座標軸があり、空間の各点の位置を指定するためには三つの座標（x,y,z）を指定しなければならない。

われわれには四次元空間をイメージすることはできないが、数学はどんな次元の空間についても語ることのできる、普遍的な言葉になってくれる。
具体的には、四次元空間の点を、四つ組の数（x,y,z,t）で表せばよい。
三次元空間の点を三つ組の数（x,y,z）で表すのと同じことだ。
同様に、任意の自然数nに対して、n次元空間の点は、n組の数で表すことができる。
ある群の各元に対して、n次元空間の対称変換の場合と同じように、矛盾のない具体的な体裁を与えることができるなら、その群は「n次元表現」を持つという。

【49】
与えられた群が、異なる次元の表現を複数持つこともある。
素粒子が８個と10個の族（ファミリー）にまとまるのは、SU(3)という群には、八次元表現と十次元表現があるからだ。
ゲルマンとネーマンによって構成された八重項に含まれる8個の粒子は、SU(3)の表現である八次元空間の、座標軸と一対一に対応している。
同じことが十重項についても言える（粒子が7個や11個の族にまとまることはない。
なぜなら数学者たちが証明しているように、SU(3)には七次元や十一次元表現はないからだ）。

【50】
当初この考え方は、よく知られた性質を持つ粒子たちを分類するための便利な方法に過ぎなかった。
ところがゲルマンは、そこからさらに歩を進めた。
彼は、この分類法がうまくいく背景には、より深い理由があるに違いないと考えた。
そして、この方法が成功したのは、ハドロンがより小さな粒子――クォーク――から構成されているからだ、と主張したのである。
ハドロンの中には、クォーク2個から構成されるものもあれば、3個から構成されるものもある。
物理学者ジョージ・ツヴァイクも、ゲルマンとは独立して、それと同じ提案をした。

【51】
これは驚くべき提案だった。
その当時、陽子と中性子は、他のハドロンと同様、それ以上分割できない素粒子だというのが一般的な考えだったからだ。
ゲルマンとツヴァイクの説は、その常識に反していた。
しかもそれだけでなく、これら新しい基本粒子は、電荷の大きさが、電子の電荷の分数になっている必要があった。
分数電荷の粒子など、誰も見たことがなかったから、そんなことを言い出した二人に、誰もが呆れた。
しかし、やがて実験によってクォークの存在が確かめられてみると、その電荷は、理論が予想した通り、分数だったのだ！

【52】

ゲルマンとツヴァイクは、どんな動機に駆り立てられて、クォークの存在を予想するに至ったのだろうか？
彼らの予想の背後にあったのは、SU(3)という群の数学的表現論だった。
具体的には、SU(3)には、二つの異なる三次元表現があるという事実にインスピレーションを得たのだ（この群の名前に３という数字が入っているのは、表現が三次元表現だからだ）。
ゲルマンとツヴァイクは、それら二つの三次元表現は、粒子の二つの族――三種類のクォークと、三種類の反クォーク――を記述しているはずだと主張した。
SU(3)の三次元表現から出発して、八次元表現と十次元表現を作ることができる。
そこから、ちょうどレゴのブロックで何かを組み立てるように、クォークをブロックとして、ハドロンを組み立てるための正確な設計図が得られる。

【53】
ゲルマンは、三種類のクォークをそれぞれ、「アップ」「ダウン」「ストレンジ」と名づけた。
陽子は２個のアップ・クォークと１個のダウン・クォークから構成され、中性子は２個のダウン・クォークと１個のアップ・クォークから構成される。
八重項を構成している粒子で、陽子と中性子以外のものには、アップ・クォークとダウン・クォークの他にストレンジ・クォークも含まれている。
また、１個のクォークと１個の反クォークから構成される粒子の八重項もある。

【54】
本書の「はじめに」では、数学は科学において大きな役割を果たしていると述べたが、クォークの発見はその好例である。
クォークは、データに基づいてその存在を予測されたのではなく、数学的な対称性のパターンに基づいて予測されたのだ。
それは純然たる理論的予測であって、SU(3)という群についての、洗練された数学的表現論の枠組みの中で生まれた予測だった。
この理論を物理学者が完全に咀嚼（そしゃく）するまでには長い年月がかかった（そしてはじめのうちは、こういう流儀に多少の抵抗もあった）。
しかし今日では、素粒子物理学の分野では、群の表現論は日常的に利用されている。
群の表現論は、単にハドロンの分類を与えただけでなく、われわれの物理的世界観を永遠に変えた、クォークの発見につながったのである。

一見すると、現実世界とは何の関係もなさそうな数学の理論が、自然界の基本構成要素を解明するために役に立ったのだ。
物質を構成する小さな粒子たちが奏でる魔法のようなハーモニーに、心を奪われずにいられようか？
宇宙の仕組みを明らかにしてくれる数学の力に、驚嘆せずにいられようか？

第７章　大統一理論

それぞれの数学を「島」だと考えてみよう。
大部分の数学者はその島を拡張する仕事に取り組んできた。
しかし、あるとき、「島」と「島」をつなげることを考えた数学者が現れた。
悲劇の数学者ガロアが死の前日に残したメモにその革新的な考えはあった。

ロバート・ラングランズについて

【55】
ラングランズ・プログラムは、過去50年間に数学の分野に出現した理論の中で、最も深く、最も胸躍るもののひとつである。
以下では、このプロジェクトについて話すが、私は単に自分の経験について語りたいわけではなく、むしろ、現代数学とはどんなものなのかを、皆さんに感じてもらいたい。
そして数学とは、オリジナリティーとイマジネーションと、革新的な洞察が物を言う分野なのだということを伝えたいと思っている。
なにしろラングランズ・プログラムは、それを示すにはうってつけの例なのだ。
なぜならこのプログラムは、数学のさまざまな領域に共通して現れる不思議なパターンを浮かび上がらせ、それに焦点を合わせることにより、異なる領域間に予想もしなかった深いつながりがあることを明らかにするものだからである。

【56】
数学にはさまざまな領域がある。
それらの領域は、しばしば別々の大陸のように感じられる。
それぞれの領域で仕事をしている数学者たちは、使う言葉も違う。
だからこそ、「統一」という観点が役に立つのだ。
その観点に立つことにより、大きくかけ離れた領域で生まれた二つの理論が、ひとつの理論の別の側面であることに気づかされるのである。
それはあたかも、それまでどれだけ努力しても身につかなかった言語が、ある日突然、理解できるようになるようなものだ。

【57】
数学全体を、壮大なジグソーパズルだと考えてみよう。
そのパズルの全体像は誰も知らない。
それを完成させることが、何千人という数学者たちの集団的な営みだ。
数学者は、それぞれグループを作って仕事をしている。
こちらでは代数を専門とする人たちが、あちらでは数論の研究者たちが、さらに向こうでは幾何学者たちが、それぞれ自分の担当する領域でパズルを解くことに励んでいる。
それぞれのグループの人たちはこれまでに、大きな絵の中の小さな「島」を作ることには成功してきた。
しかし、数学の歴史のほとんどを通じて、それら小さな島々が、いつかはつながるのかどうかを見抜くのは難しかった。

そのため大部分の数学者は、パズルのあちこちにできた島を拡張する仕事に取り組んできた。

【58】
しかしときおり、島と島をつなぐ方法に気づく者が現れる。
そういう人物が登場すると、大きな絵の重要な特徴が姿を現し、あちこちの領域にも新たな意味が与えられる。
ロバート・ラングランズはまさにそれをやってのけたのだが、しかし彼の野望は、単に少数の島をつなぐというだけに留まらなかった。
1960年代の末に彼が創始したラングランズ・プログラムは、今日ではたくさんの島に――それらがどれほど無関係に見えようとも――橋を架けるメカニズムを見出そうという運動に発展している。

【59】
ラングランズは現在、プリンストンの高等研究所で、数学の名誉教授となっている。
驚異的な才能とヴィジョンに恵まれたラングランズは、1936年に、バンクーバー近郊の小さな町で、機械工場を経営していた両親のもとで生まれ育った。
彼にはいろいろと驚くべきことがあるが、そのひとつは、いくつもの言語を自由に操れることである。
大学に入るまでは、母語である英語しか話せなかったらしいのだが、今では英語の他に、フランス語、ドイツ語、ロシア語、トルコ語に通じている。
近年、私はラングランズと緊密な共同研究をしているため、われわれはしばしばロシア語でやり取りをしている。
あるとき彼は、原文で読んだというロシアの作家のリストを送ってくれた。
そのリストに挙がっていた作品は実に幅ひろく、たぶん彼は私よりロシア文学を読んでいるだろう。
私は時々、ラングランズの特異的な言語能力は、数学の異なる文化の間に橋を架ける能力と関係があるのではないかと思うことがある。

数の対称変換について

【60】
ラングランズ・プログラムの鍵となるのは、対称変換という概念である。
対称変換について調べることから、群という概念がもたらされた。
また、素粒子を分類したり、クォークの存在を予言するためにも、群が役立つことを見た。
ラングランズ・プログラムにとって重要な群は、数の研究――数論――の領域に現れる群である。

【61】
われわれが日常生活で出会う数には、ある共通の性質がある――１という数に、１それ自身をいくつか加えることによって作られるということだ。
１＋１は２、１＋１＋１は3である。

こうして得られる数のことを、自然数という。

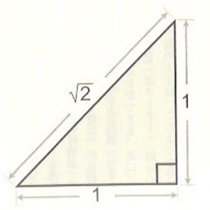
自然数の他に、０という数もあるし、負の数 －１、－２、－３、・・・もある。
これらの数をひっくるめて「整数」と呼ぶ。
つまり整数とは、自然数か、０か、または負の自然数のことなのだ。

日常の生活では、整数よりも少しだけ一般的な数にも出会う。
物の値段はドルやセントで勘定され、しばしば$２．59のように表される。
この表記は、２ドル59セントを意味する。
2.59は、２＋59／100（１／100の59倍）に等しい。
１／100は、それ自身を100回足し算すると、１になる数である。
このような数のことを、有理数、または分数という。

日々の生活で出会う有理数の好例が、「クォーター（4分の1ドル）」だ。
数学ではこれを、1／４という分数で表す。
一般に、任意の二つの整数mとnから、分数m／nを作ることができる。
mとnに公約数dがあれば（つまりm＝dm’、n＝dn’なら）、dを打ち消してm／nをm’／n’と書き換えることができる。
逆に、１／４を25／100と書くこともできる。

日常出会う数の大半は、このような分数、すなわち有理数である。
しかし数の中には、有理数ではないものもある。
例えば２の平方根――√２と書く ――は有理数ではない。
それは、二乗すると２になる数である。
幾何学的には、√２は、直交する二辺の長さがどちらも１であるような直角三角形の、斜辺の長さである。

[図7－1] √2という数は図示することができる



この数は、mとnを自然数として、m／nの形には表せないことがわかっている。
しかし√２を小数で表し、その最初のいくつかの数字を示すことにより、有理数で近似することはできる。
１．4142、１．41421さらに１．414213といった具合だ。
しかし小数点以下の数をどこまで続けていっても、それはあくまで近似にすぎない――数の並びにはきりがないのだ。
√２を、有限な小数によって正確に表すことはできない。
√２は、三角形の斜辺の長さなのだから、この数が確かに存在していることはわかる。
ただ、有理数という数の体系内には、この数の居場所はないのだ。

このような数は他にもたくさんある。
例えば３の平方根√３もそうだ。

このような数を有理数と足し算するためには、系統的な方法を開発しなければならない。
有理数に√２を加え、どんな数の体系が得られるだろうか。
それには、その数の体系に、分数m／n（つまり有理数）の形をしたすべての数を含んでいなければならない。
そのような数は、m／n＋√２の形を持つ。
また、その新しい数の体系内で、数同士の掛け算ができるようであってほしいから、有理数と√２との積はすべて、その体系に含まれていなければならない。
そのような数は、k／l√２の形をしたすべての数を含んでいなければならない。
以上を合わせると、その新しい数の体系は、

m／n＋k／l√２　　の形をしていなくてはならない。

この形をした数すべてを集めたもの内部で、通常の演算操作――足し算、引き算、掛け算、割り算――ができ、その結果として得られる数はやはり同じ形をしているという意味において、この体系は「自己充足」している。

こうして得られた新しい数の体型には、有理数にはない、ある秘密の特徴がある。
その特徴が、魔法のような数の世界への入り口となってくれるだろう。
実はこの数の体系は、いくつかの「対称変換（シンメトリー）」をもっているのだ。

ここで私は、「対称変換」ということばを、どれかひとつ選んだ数に対して、別の数を割り当てるルール、という意味で使っている。
別の言い方をすれば、この数の体系に含まれる数を、同じ体系に属する別の数に変換するルールである。
つまり、ここでいう対称変換とは、ひとつの数を、別の数に「移行させる」ルールなのだ。
そのルールは、足し算、引き算、掛け算、割り算という、普通の演算操作と両立しなければならない。
これまでの話からは、なぜ数の体系に対称変換など考えなければならないのかわからないかも知れないが、その理由はすぐにわかる。

この新しい数の体系は、恒等変換を持つ。
この場合の恒等変換は、すべての数を、それ自身に「移行させる」ルールである。
それはちょうど、丸い机を0度だけ回転させると、机のすべての点が自分自身に移行するようなものだ。

この数の体系には、［恒等変換のように自明ではない］非自明な対称変換もある。
それがどういうものかを説明するために、√２は、方程式x^2＝２の解であることに注意しよう。
√２をxに代入すれば、確かに等号が成り立つことがわかる。
しかし実を言えば、この方程式には解が二つある。
ひとつは√2、もうひとつは-√２だ。
実際、この新しい数の体系を作ったときに、われわれは有理数の体系にこれら二つの数を添加しているのである。
そして、これら二つの解を切り替えることが、この数の体系のひとつの対称変換になるのだ。

これを紅茶のたとえで説明すると、一杯の紅茶に、白い角砂糖または茶色い角砂糖を、ひとつ加えて、よく混ぜる。
白い角砂糖は√２、茶色い角砂糖は-√２のようなものだ。
この両者を交換しても、結果として得られる一杯の紅茶は何も変わらない。
それと同様に、√２と-√２を交換することは、この数の体系の、ひとつの対称変換なのである。

この交換をほどこしても、有理数は元のままで変化しない。
したがって、m／n+k／l√２　という形をした数は、m／n-k／l√２　になる。
どの数も、√２の前の符号が変わるだけで、それ以外は何も変化しないのである。

この新しい数の体系は、蝶に似ている。
m／n+k／l√２　の形をした各部分の数のひとつひとつは、蝶の羽の鱗粉のようなものだ。
√２と-√２を交換するということは、蝶の二枚の羽を交換する対称変換に相当する。

X^2＝２の代わりに、xを変数とする、より一般的な方程式を考えることができる。
例えば三次方程式x^3-x+１＝０でもいいだろう。
もしもその方程式の解が有理数でなければ（この三次方程式の解も有理数ではない）、それらを有理数に添加することができる。

【62】
このような方程式をいくつかまとめて考え、それらの解を有理数に添加してもよいだろう。
こうすることで、異なる数の体系がたくさん得られる。
数学者はこのような数の体系のことを、「数体」という。
「体」という言葉は、その数の体系が、足し算、引き算、掛け算、割り算の操作のもとで、閉じている［これらの演算をした結果も、やはり同じ数の体系に含まれている］ということを意味している。

√２を添加して得られる数体と同じく、一般的な数体の場合にも、これらの基本的な演算操作と両立する対称変換がある。
与えられた数体の対称変換は、引き続いて行うことができる（つまり変換を合成することができる）。
幾何学的な対象に対称変換をほどこすのと同じことである。
そうであってみれば、数体の対称変換が群になっているとしても驚くには当たらないだろう。
この群のことを、フランスの数学者エヴァリスト・ガロアを称えて、数体の「ガロア群」と呼ぶ。

【ガロア群-用語解説：加法と乗法の操作を保存するような、数体の対称変換の群】
【数体-用語解説：与えられた有限個の有理数係数の一変数方程式の解全体を有理数に添加した体】

方程式が解をもつかという問題をまったく違う数学で解く

【63】
まぎれもない神童だったガロアは、若くして革新的な発見をし、1832年5月30日、20歳にして決闘で死んだ。
その死の前後、ガロアは夜中にろうそくの光の下、懸命にペンを走らせ、数の対称変換についての論考を書き上げた。
それは彼が人類に宛てたラブレターだった。
彼はその手紙の中で、自分が成し遂げた輝かしい発見をわれわれに語ってくれたのだ。
今日、ガロアが発見した対称群は、彼の名を冠してガロア群と呼ばれており、エジプトのピラミッドやバビロンの空中庭園と同じく、われわれの生きるこの世界の驚異と呼ぶべきものである。
われわれの心を捉えるのは、ガロア群の美しさだけではない。
現実のこの世界を理解するために、彼の群が持つ大きな可能性もまた、われわれの心を捉えて離さないのだ。
ガロアはあまりにも時代に先駆けていた。
彼のアイディアは過激すぎて、初めのうち同時代人には理解することができなかった。
フランス科学アカデミーは彼の論文を二度にわたり却下し、その仕事が世に出て、他の数学者たちに理解されるまでは、ほぼ50年の歳月が流れたのである。
しかし今日では、彼の発見は、現代数学の柱のひとつとみなされている。

【64】
ガロアは、幾何学であれば直感的に理解できる対称変換という考え方を、数論の最前線に当てはめた。
しかもそれだけでなく、対称変換には驚くべき力があることを示したのだ。

ガロア以前には、数学者たちは$x^2=2$や$x^3-x+1=0$といった方程式（それを多項方程式という）の解をあらわに書いた式――解の公式――を見出そうとしていた。
残念ながら、ガロアの死から２世紀を経ても、学校ではいまだにその方法を教えている。
一般的な二次方程式、

$$ax^2+bx+c=0$$

の解を、係数a、b、cで表したものを、公式として暗記させるのだ。
われわれが知るべきは、その公式には、平方根が関係しているということだけだ。
同様に、もう少し複雑な一般的三次方程式、

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

の解を、係数a、b、c、dで表した公式もある。
その公式には三乗根が関係している。
多項方程式の解を、根（二乗根、三乗根、四乗根、等々）で表すという作業は、方程式の次数が高くなるにしたがって、どんどん複雑になっていく。

【65】

二次方程式の解の公式は、すでに９世紀には、アッバース朝の数学者アル・フワーリズミーによって知られていた（代数algebraという言葉は、アル・フワーリズミーの著書のタイトルに含まれていた、al-jabrという言葉に由来する）。
三次方程式と四次方程式の解の公式は、16世紀の前半に発見された。
当然ながら、次のターゲットは五次方程式の解の公式だった。
ガロア以前には、300年にわたり多くの数学者が懸命になってその公式を探したが、これといった成果はなかった。

【66】
しかしガロアは、それまでの数学者は、問いの立て方を間違っていたことに気がついた。
彼は、この方程式の解を有理数に添加することにより得られる数体の、対称群に焦点を合わせるべきだと主張したのだ。
その群を、今日われわれはガロア群と呼んでいる。
ガロア群を記述するのは、解の公式を書き下すよりはるかにやさしい。
この群について何か意味のあることを言うためには、解を知る必要はない。
そして、群を調べることで、解について重要な情報を引き出すことができるのだ。

【67】
実際、ガロアは、根号で表された解の公式が存在するのは、対応するガロア群が、ある特殊な性質を持つ場合だけであることを示した――そのような群のことを、今日数学者たちは「可解群」と呼んでいる。
二次方程式、三次方程式、四次方程式に対しては、ガロア群は常に可解である。
これらの解の公式が、根号を用いて表されるのはそのためだ。
しかしガロアは、典型的な五次方程式（またはそれよりも高い次数の方程式）の対称群は、可解ではないことを示した。
したがって、それらの方程式については、根号による解の公式は存在しない。

【68】
ガロア群の感じをつかむために、二つほど例を見ておくことにしよう。
方程式x^2＝２については、すでにガロア群を記述した。
この方程式には、√２と-√２という二つの解があり、われわれはそれらを有理数に添加したのだった。
結果として得られる数体のガロア群は、二つの元からなる。
ひとつは恒等変換であり、もうひとつは√２と-√２を交換する対称変換である。

【69】
次に、先ほどの三次方程式を考える。
そして、この三次方程式の係数は有理数だが三つの解はいずれも無理数だと仮定しよう。
そうしておいて、三つの解を有理数に添加し、新しい数体を作る。
それはちょうど一杯の紅茶に、三種類の要素――角砂糖一個、ミルク少々、スプーン一杯の蜂蜜――を添加するようなものだ。

その三次方程式は、この数体（三種類のものを添加した紅茶）のどんな対称変換によっても形を変えないだろう。
なぜなら、この方程式の係数は有理数であり、有理数は対称変換のもとで変わらないからだ。
よって、その三次方程式のどれかの解（三種類の添加物のどれかひとつ）は、三つの解のいずれかに移行する。
このことから、この数体の対称群――ガロア群――を、三つの解の置換として記述することができる。

【70】
この話で重要なのは、われわれはこれを、解の公式を書き下すことなく記述したということだ。
同様に、任意の多項式について、その解をすべて有理数に添加して得られた数体の対称変換のガロア群は、これらの解の置換として記述されるだろう（n次の多項方程式で、解はすべて互いに異なり、有理数でない場合、n個の解が存在する）。
このように、解を係数で表さなくても、方程式について多くの情報を引き出すことができるのだ。

【71】
ガロアの仕事は数学的洞察の威力を見せつける、素晴らしい実例となっている。
ガロアは、多項方程式の解の公式を求めるという問題を、みんなが思っていたような形で解決したわけではなかった。
彼は、問題をハッキングしたのだ！
問題をひねったり、ねじ曲げたりして、従来とはまったく異なる光の下でそれを見た。
そして見事な洞察力を発揮して、人々が数や方程式を見る目を永遠に変えてしまったのである。

【72】
それから150年後、ラングランズはこれらのアイディアをはるか遠くまで推し進めた。
1967年、彼はガロア群の理論と、調和解析と呼ばれる数学の分野とをつなぐ革命的な洞察を得た。
これら二つの領域は、何光年も離れているように見えるにもかかわらず、実は密接につながっていたのである。
当時30代の初めだったラングランズは、著名な数学者アンドレ・ヴェイユへの手紙の中に、自分のアイディアの概略を書いた。
そこに書かれていたのは、数学に対するわれわれの考え方を永遠に変えるような、先駆的な理論の冒頭だった。
こうしてラングランズ・プログラムは誕生した。
ラングランズが提唱した問題を解くために、すでに何世代かの数学者が人生をかけてきた。
一体何が、彼らをそこまで駆り立てたのだろうか？

第８章　「フェルマーの最終定理」

ラングランズ・プログラムがどういうものかを知るには、「フェルマーの最終定理」がどうやって証明されたかを知るといい。
350年間にわたって数学者を悩ませた難問は、まったく別の予想を証明することで解けたのだ。

和声から生まれた数学

【73】
第２章で初めて対称変換の話をしたとき、SU(3)という群の表現が、素粒子の振る舞いを支配していることを知った。
ラングランズ・プログラムにおいても、やはりその焦点は群の表現に結ばれている。
ただしその場合の群は、数体の対称変換に関するガロア群なのだ。
実はそれらの表現こそが、数に関する重要な情報をすべて含む、いわば数体の「ソースコード」なのである。

【74】
ラングランズの見事な着想は、数に関する重要な情報を、まったく異質な数学的対象から引き出せるのではないかというものだった。
その対象とはすなわち、調和解析（ハーモニック・アナリシス）という領域に現れる、保型関数と呼ばれるものである。

【調和解析-用語解説：関数を、サインやコサインなどの調和関数によって分解するという手法について研究する数学の一分野。保型関数とは調和解析に現れる関数。】

調和解析の起源をたどれば、和声学（ハーモニクス）にさかのぼる。
和声学の基本思想は、いかなる音も、基本となる音（基音）と、それの何倍かの振動数を持つ音（倍音）の系列との重ね合わせによって表せる、というものだ。
例えて言えば、交響曲で響き渡る音が、さまざまな楽器が奏でる音の重ね合わせになっているようなものである。

それを数学的に言うと、与えられた関数は、倍音を記述するために使われる基本的な関数——おなじみの三角関数、サインやコサインなど——の重ね合わせとして表せるということになる。
保型関数は、おなじみの三角関数の上位バージョンのようなものだ。
保型関数を計算するためには、強力な解析的方法を使うことができる。

ラングランズは、そういう性質の良い関数を、難しい数論の問題を調べるために利用できるという、素晴らしい洞察を得たのである。
もしそれができれば、それまでは隠されていた数たちのハーモニーが見出せるだろう。

【75】

「はじめに」では、情報に秩序を与えることは、数学の重要な役割のひとつであると述べた。
ラングランズの言葉によれば、それは「混沌として見えるものから、秩序を作り出す」ことだ。
ラングランズの着想が強力だと言うのは、混沌として見える数論のデータに秩序を与え、対称性と調和に満ちた規則的なパターンにするために役立つからなのである。

数学の領域を地理上の大陸に例えるなら、数論は北アメリカ大陸、調和解析はヨーロッパ大陸と言ったところだろう。
北アメリカのどこかから、ヨーロッパの何処かへと、瞬時に移動できる新しいテクノロジーが発明されたとしたらどうだろう？
ランズランズが見出したつながりは、まさにそれに相当するものなのだ。

背理法による証明

【76】
これから、そういう見事なつながりのひとつについて説明していくが、それは
フェルマーの最終定理と密接な関係がある。
フェルマーの最終定理を証明するのは非常に難しかったが、この定理はどういうものかを説明するのはとても簡単だ。

もしもnが３以上であるなら、方程式

$$x^n+y^n=z^n$$

の解となるような自然数x、y、zは存在しないと、この定理は主張しているのである。

この命題が正しいことは、今から350年以上も前の1637年に、フランスの数学者ピエール・ド・フェルマーにより予想されていた。
彼はそのとき読んでいた古い本の余白に、この命題の「真に驚くべき」証明を見出したが、「余白が狭すぎるのでここに書くことはできない」と述べた。
フェルマーの証明が間違いだったことには、ほとんど疑問の余地がない。
真の証明が見つかるまでには、それから350年以上もかかり、しかもその証明は信じられないほど複雑なものになったからだ。

証明は大きく二つのステップから構成されている。
第一のステップが達成されたのは、1986年のことだった。
この年、ケン・リベットが、「志村-谷山-ヴェイユ予想」と呼ばれる命題を証明すれば、自動的にフェルマーの最終定理が証明されることを示した（数学でいう「予想」とは、真だと考えられるが、それを証明する方法が知られていない命題のことである。証明が見つかれば、予想は「定理」になる）。

【77】
ケン・リベットが示したのは、もしもフェルマーの方程式の解となる自然数x、y、zが存在

するなら、それらの数を使って、ある種の三次方程式を作ることができ、その三次方程式は、志村-谷山-ヴェイユ予想によって除外されるような性質を持つ、ということだった（その三次方程式については、以下で説明する）。
もしも志村-谷山-ヴェイユ予想が真なら、そのような三次方程式は存在できない。
すると、フェルマーの方程式の解となる、x、y、zという数も存在できないことになる。

【78】
この論理の流れをもう一度整理しておこう。
フェルマーの最終定理を証明するためには、まずそれが偽だと仮定する――つまりフェルマーの方程式を満たすような自然数x、y、zが存在すると仮定する。
次に、それらの自然数を、ある三次方程式に関係づける。
するとその三次方程式は、望ましくない性質を持つことがわかる。
志村-谷山-ヴェイユ予想は、そのような方程式は存在できないと述べている。
したがって、x、y、zという数も存在できない。
つまりフェルマーの方程式には解がない。
それゆえフェルマーの最終定理は真である！

【79】
このような論法を「背理法」と呼ぶ。
要するに、フェルマーの最終定理を証明するためには、志村-谷山-ヴェイユ予想が真であることを証明しさえすればよいということだ。
こうして（それがわかったのは、1996年のリベットの仕事がなされた後のことである）、フェルマーの最終定理の証明を見出そうという努力は、志村-谷山-ヴェイユ予想を証明するという目標に向けられた。

長年の間には、証明を見出したという発表が何度もなされたが、その後詳しい検討がなされる中で、それらの証明には誤りや論理のギャップが含まれていることが示された。
1993年にアンドリュー•ワイルズが、志村-谷山-ヴェイユ予想を証明したと発表したが、それから数ヶ月後、彼の証明には一か所ギャップが含まれていることがわかった。
しかし幸運にも、ワイルズはそれから一年のうちに、数学者リチャード・テイラーの協力を得て、そのギャップを埋めることができた。
二人は力を合わせて、証明を完成させたのだ。

Nを法とするとは？

【80】
フェルマーの最終定理を証明しようとする中で、志村-谷山-ヴェイユ予想が証明されたことは、ひとつの重要な成果である。
またこの予想は、ラングランズ・プログラムの特殊ケースと見ることもできるため、ラングランズ・プログラムが予想する思いもよらぬつながりが、実際にどんなものかを示すには格好の例になってくれる。

【81】
志村-谷山-ヴェイユ予想は、ある種の方程式に関する命題である。
実は数学のかなりの部分は、方程式を解くことと関係している。
方程式を解くときにわれわれが知りたいのは、与えられた方程式が、与えられた定義域に解を持つかどうかだ。
解が存在するとして、それを見出すことはできるのだろうか？
もしも解が複数あるなら、それは何個なのだろう？
そもそも方程式の中に、解を持つものと持たないものがあるのはなぜだろう？

【82】
第７章では、x^2＝２のような一変数の多項式を扱った。
フェルマーの最終定理は$x^n+y^n=z^n$という三変数の方程式に関する命題だ。
そして志村-谷山-ヴェイユ予想は、二変数の代数方程式の、あるクラスに関するものである。
例えば、次の方程式もそのひとつだ。

$$y^2+y=x^3-x^2$$

この方程式の解は、左辺と右辺とが等しくなるような、xとyの組である。
しかしわれわれは、xとyはどんなタイプの数であってほしいのだろうか？
選択肢はいくつかある。
xとyは、自然数または整数だと決めてしまってもよい。
あるいは有理数とすることもできる。
実数の範囲で、解xとyを探すこともできるし、複素数としてもよい――複素数を選ぶ場合については、次章で説明する。

【83】
しかし実を言えば、選択肢はもうひとつあるのだ。
その選択肢はそれほどわかりやすくはないが、重要性にかけては他の選択肢に引けを取らない。
それは、Nを自然数として、「Nを法とする」xとyを探すというものだ。
その意味は、右辺と左辺が、Nで割り切れる数を差し引けば等しくなるような、整数x、yの組を探す、ということである。
例を挙げよう。
この方程式の、「N＝５を法とする」解を探してみよう。
すぐに見つかる解として、x＝０、y＝０がある。
もう少し探すと、あと三つ、これほど簡単ではない解が見つかるだろう。
ひとつは、x＝０、y＝４。
このとき左辺は20、右辺は０だから、左辺と右辺の差は20で、これは５で割り切れる。
したがって、確かにこのxとyは、５を法とする解となっている。
同様に、x＝１、y＝０、およびx＝１、y＝４も、５を法とする解である。

【84】
実はこのタイプの算術には、第２章で、丸い机の回転群について述べたときに、すでに出会っている。
そのとき見たように、角度の足し算は「360を法とする」算術によって行われる。
つまり、二つの角度の和が360度よりも大きければ、そこから360を引いて、その結果が１から360までの間に収まるようにする。
例えば450-360＝90だから、450度の回転は、90度の回転に等しい。

時計を使うときにも、この算術に出会う。
午前10時に仕事を始めて、８時間働くとすると、仕事が終わるのは何時だろうか？
10＋８＝18だから、「18時に終わる」と答えるのが自然だろう。
一日の時間を、０から24までの数字で表すフランスでなら、そう答えても構わない。
しかしアメリカでは、それと同じことを「午後6時に終わる」と言う。
18から12を引いて、18-12＝６としたからである。

このようにわれわれは、時間についても、角度の場合と同じタイプの計算を使っているのである。
角度の場合には、「360を法とする」足し算をし、時間の場合には「12を法とする」足し算をしている。

【85】
同様に、任意の自然数Nを法とする足し算をすることもできる。
０からN-１までの整数を、順番に並べたものを考えよう。

$$\{0,1,2,\cdots,N-2,N-1\}$$

N＝12なら、これは時間が取りうる値の集合である。
一般の場合に12の役割を演じるのがNだ。
このとき、われわれを０に引き戻すのは、12ではなくNとなる。

これらの数の集合に対し、時間の場合と同じく、加法（足し算）を定義する。
この集合の中から、任意の二つの数が与えられたとして、それらを足し算したものがNよりも大きくなるなら、そこからNを引き算して、結果がこの集合に含まれるようにする。
この演算（Nを法とする足し算）を入れることにより、この集合は群になる。
その単位元は0である――つまり、０を他のどの数に加えても、その数は変化しない。
実際、n＋０＝nである。
また、この集合から選び出した任意の数nについて、「加法の逆元」はN-nである。
実際、n＋（N-n）＝Nとなり、これは演算のルールによれば０に等しい。

一例として、N＝３の場合を考えてみよう。
このとき集合は｛0,1,2｝、演算は、「３を法とする加法」である。
例えば、

２＋２＝１　　modulo ３　　　　〔合同式　２＋２≡１（mod3）のこと〕

となる。
なぜなら２＋２＝４だが、４＝３＋１だから、３を法とする演算では、４は１に等しいからである。

オンライン決済暗号に使われる「有限体」という数の体系

【86】
さっきの集合の中から任意の数を二つ与えられたとして、それらを掛け算することもできる。
その結果は、０からN－１までの範囲には含まれないかもしれないが、そこからNの何倍かを引き去った数が、この範囲にひとつだけ存在するはずだ。
しかし一般に、集合｛1,2,・・・, N－１｝は、掛け算については群にならない。
単位元は確かに存在して、それは1である。
しかしすべての元が、Nを法とする逆元を持つわけではない。
すべての元が逆元を持つのは、Nが「素数」――１と自分自身以外に約数を持たない数――の場合だけなのだ。

小さい方から素数をいくつか挙げれば、２、３、５、７、１１、１３・・・となる（慣例として１は素数に含めない）。
２を別にすれば、偶数は素数ではない。
なぜなら偶数は、２で割り切れるからだ。
また、９は奇数だが、3で割り切れるので素数ではない。
素数は無限に存在する――どれだけ大きな素数を考えたとしても、それよりもさらに大きな素数が存在する。
約数を持たない素数は、自然数という世界の素粒子のようなものだ。
他のすべての自然数は、素数の積として一意的に書くことができる。
例えば60＝２・２・３・５である。

【87】
素数のひとつを決めよう。
普通はそれをp（primeの頭文字）と表す。
次に、０からp－１までの整数の集合を考える。

｛0,1,2,3,4,・・・, p -2, p -1｝

この集合に対して、pを法とする二つの演算――足し算と掛け算――を考える。
先ほど見たように、この集合は、pを法とする足し算について群になる。
さらに注目すべきは、もしもこの集合から０を取り除き、１からp -1までの整数からなる集合、｛1,2,・・・, p -1｝を作ると、この集合は、pを法とする掛け算について群になるということだ。
１は、掛け算の単位元である。
さらに、１からp -1までの任意の自然数は、掛け算の逆元が存在するのだ。
例えばp＝５のとき、

$2 \cdot 3 = 1 \quad \text{modulo } 5$

であり、また、

$4 \cdot 4 = 1 \quad \text{modulo } 5$

である。
つまり、５を法する掛け算において、２の逆元は３であり、４の逆元は自分自身になるのである。
実はこのことは一般に成り立つ。

【88】
日常生活の中で、整数や分数はおなじみの数である。
$\sqrt{2}$のような数を使うこともある。
しかし今、われわれは全く新しいタイプの数の体系を見出した。
それは、pを素数として、｛0,1,2,・・・,p－1｝という、有限個の数からなる集合であり、この集合に対しては、pを法とする足し算と掛け算を行うことができる。
この数の体系を、p個の要素からなる「有限体」と呼ぶ。
実はこのタイプの有限体は、数の世界において、重要な多島海の一つなのである。
ところが残念なことに、ほとんどの人たちは、こういう多島海が存在するということさえ知らされずにいる。

【89】
これらの数の体系は、例えば有理数のような、おなじみの数の体系とはまるで性質が異なるように見えるが、両者の間には、ひとつ目立った共通点がある。
それは、足し算、引き算、掛け算、割り算という演算の元で、閉じている［演算の結果がもとの集合に含まれる］ということだ。
だとすれば、有理数で行える演算はすべて、何やら秘儀的な雰囲気の漂うこの有限体でも行えるかもしれない。

実を言えば、重要な応用がいくつか見つかったおかげで、これらの数の体系はもはや秘儀的でも何でもなくなっている。
そんな応用の中で最も注目されるのが、暗号だ。
オンラインで買い物をしてクレジットカードの番号を入力するとき、その番号は、ここで述べた素数を法とする演算で暗号化されているのである。
その暗号化の方法は、右で見たものとよく似た方程式で決まっている。

【90】
先ほどの“三次方程式”に戻ろう。

$y^2 + y = x^3 - x^2$

さまざまな素数pについて、pを法とする解を探そう。

すでに見たように、５を法とする解は四つある。
しかし、p＝５のときの解が、他の素数（例えばp＝７やp＝11）を法とするときの解になるとは限らない。
方程式の解は、法となる素数pに依存するからだ。

【91】
この方程式のpを法とする解の個数は、pにどのように依存するのだろうか？
Pが小さければ、解の個数を実際に数えることができるため（そのためにコンピュータを使うにせよ）、小さな表を作ることができる。
数学者たちはしばらく前から、このタイプの方程式のpを法とする解の個数は、おおよそpに等しいことは知っていた。
予想される解の個数（p）と、実際の解の個数との差を「不足」と呼び、a_pで表すことにしよう。
つまり、右の方程式のpを法とする解の個数は、$p - a_p$に等しい。
与えられたpについて、a_pは正の値になることもあれば、負の値になることもある。
例えば、p＝５のときには解は四つあるのだから、４＝5-１で、a_5＝１である。

素数が小さいうちは、a_pをコンピュータを使って求めることができる。
そうして得られた結果は、ランダムに見える。
a_pを得るために使えそうな、式や規則があるようには見えないのだ。
さらに困ったことに、a_pを求めるための計算は、pが大きくなるにつれてどんどん複雑になっていく。
しかし、すべてのa_pを一挙に生成する、シンプルな規則があるとしたらどうだろう？

フィボナッチ数を一望のもとに見渡せる数式

【92】
数を生成する「規則」と言われても、何のことかわからない人のために、もう少し親しみのあるいわゆるフィボナッチ数列を考えてみよう。

1,1,2,3,5,8,13,21,34,・・・

フィボナッチという名前は、1202年に刊行された著書の中でこの数列を導入したイタリアの数学者に因んでいる（この数列が導入された文脈は、うさぎの繁殖だった）。
フィボナッチ数列は、花びらの配置からパイナップルの表面のパターンまで、自然界にあまねく存在している。
また、証券取引の分析に使われている「フィボナッチ・リトレースメント」をはじめ、さまざまな分野に応用されてもいる。

【93】
フィボナッチ数は、次のように定義される。
この数列の最初の二つの項は、ともに1である。
それに続く数は、先行する二つのフィボナッチ数の和に等しい。

２＝１＋１，３＝２＋１，５＝３＋２ などと。
N番目のフィボナッチ数をF_nと表せば、$F_1=1$，$F_2=1$であり、

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, \quad n>2$$

となる。
原理的には、この規則があれば、nを任意の自然数として、n番目のフィボナッチ数を求めることができる。
しかしそのためには、まず1からn－１までの全てのｉについて、フィボナッチ数F_iを求めなければならない。

【94】
ところがフィボナッチ数は、別の方法でも生成できるのである。
次の級数を考えよう。

$$q+q(q+q^2)+q(q+q^2)^2+q(q+q^2)^3+q(q+q^2)^4+\cdots$$

これを言葉で説明すれば、補助変数qに、（$q+q^2$）のべきをひとつずつ上げたものを順次掛け算し、その全てを足し上げるのである。
この式の括弧をはずすと、ある無限級数が得られる。
その最初のいくつかの項を書き出せば、次のようになる。

$$q+q^2+2q^3+3q^4+5q^5+8q^6+13q^7+\cdots$$

この数列の最初の方を調べると、nが１から７までの場合には、q^nの係数が、n番目のフィボナッチ数F_nになっていることがわかる。
例えば$13q^7$という項があるが、実際に$F_7=13$になっている。
これが全てのnについて成り立つのだ。
そのため数学者はこの無限数列のことを、フィボナッチ数の生成関数と呼んでいる（母関数とも言う）。
この驚くべき関数を使えば、n番目のフィボナッチ数を、nよりも小さな番号のフィボナッチ数を知らなくとも計算することができる。
しかし実際に計算できるということを別にしても、この生成関数のありがたみは見て取れるだろう――生成関数は、自己言及的な再帰的手続きを与えるのではなく、フィボナッチ数全体を、一望のもとに見渡せてくれるのである。

こう対応している

【95】
素数を法とする三次方程式の解の個数を与える、a_pに話を戻そう。
これらの数を、フィボナッチ数のようなものと考えてほしい（フィボナッチ数F_nは自然数nでラベルづけされているのに対し、a_pは素数pでラベルづけされているが、その違いは無視する）。

a_pを生成する規則があるとは思えない。
ところが1954年に、ドイツの数学者マルティン・アイヒラーが、まさにそんな規則を見出したのである。
次の生成関数を考えよう。

$$q(1-q)^2(1-q^{11})^2(1-q^2)^2(1-q^{22})^2(1-q^3)^2(1-q^{33})^2(1-q^4)^2(1-q^{44})^2 \cdots$$

言葉で言えば、qに$(1-q^a)^2$の形をした因子を順次掛けたものになっている。
ここでaは、nおよび11n（n＝1,2,3,・・・）の形をした数である。
一般的な計算規則、

$$(1-q)^2=1-2p+q^2, \qquad (1-q^{11})^2=1-2p^{11}+q^{22}, \qquad \cdots$$

を使って括弧をはずし、全ての因子の積を取る。
項を整理すると、次のような始まり方をする無限級数を得る。

$$q-2q^2-q^3+2q^4+q^5+2q^6-2q^7-2q^9-2q^{10}+q^{11}-2q^{12}+4q^{13}+\cdots$$

省略記号は、qのべきが13よりも大きい全ての項を代表している。
この数列は無限に続くが、それぞれの項はよく定義されている。
なぜならどの項も、有限な個数の因子により決定されているからだ。
q^mの項の係数を、b_mで表してみよう。
すると$b_1=1$，$b_2=-2$，$b_3=-1$，$b_4=2$，$b_5=1$が得られる。
筆算でも、コンピュータを使っても、これらは容易に求めることができる。

アイヒラーが得た驚くべき洞察は、全ての素数pに対し、係数b_pはa_pに等しいということだった。
つまり、$a_2=b_2$，$a_3=b_3$，$a_5=b_5$，$a_7=b_7$等々が成り立つのである。
これらの等式が確かに成り立っていることを、p＝５の場合について調べてみよう。
生成関数を見ると、q^5の係数は$b_5=1$であることがわかる。
一方、先ほど見たように、p＝５を法とする三次方程式の解は四つある。
したがって$a_5=5-4=1$であり、確かに$a_5=b_5$が成り立っている。

モジュラーという数学について

【96】
出発点に取った問題は、果てしなく複雑そうだった。
何しろ、全ての素数pについて、pを法とする方程式、

$$y^2+y=x^3-x^2$$

の解の個数を数えあげようというのだから。
ところが、この問題について必要な情報は全て、次の一行に含まれているのである。

$$q(1-q)^2(1-q^{11})^2(1-q^2)^2(1-q^{22})^2(1-q^3)^2(1-q^{33})^2(1-q^4)^2(1-q^{44})^2\cdots$$

この一行の式が、先ほどの“三次方程式”の、素数を法とする解の個数に関する全ての情報を含む、秘密の暗号なのである。

【97】
この“三次方程式”を、複雑な生物とイメージしてみよう。
そしてこの方程式の解は、その生物のさまざまな特徴である。
生物に見られる特徴は、DNA分子にコードされていることが知られている。
同様に、考えている方程式がどれほど複雑だったとしても、それらの特徴は全て、煎じ詰めれば、方程式のDNAに相当する生成関数にコードされている。
しかもその生成関数は、たったひとつの簡単な規則で定義されているのだ。

【98】
しかもそれが話の全てではない。
いっそう魅力的なのは、もしもqの絶対値が１よりも小さければ、さっきの無限級数は、よく定義された数に収束するということだ。
それはつまり、qを変数とする関数が得られたということを意味する。
しかもその関数は、以下に見るように、おなじみの三角関数――サイン（正弦関数）やコサイン（余弦関数）――の周期性とよく似た、きわめて特殊な性質を持つのである。

【99】
関数sin（x）は、周期２πの周期関数である。
つまりsin（x＋２π）＝sin（x）が成り立つ。
しかも、sin（x＋４π）＝sin（x）も成り立ち、さらには一般に、任意の整数nに対して、sin（x＋２πn）＝sin（x）が成り立つ。
これを次のように考えてみよう。
整数nが、直線上の点xを、x＋２πnに移すという意味で、直線に対する対称変換を引き起こすものとしよう。
したがって、全ての整数からなる群は、直線に対する対称変換の群として実現される。
正弦関数がこのような周期性を持つということは、この関数がこの群の作用のもとで不変であることを意味している。

【100】
同様に、先ほどの変数qのアイヒラー生成関数は、ある対称変換の群の作用のもとで不変なのである。
ただしこの場合には、qは実数ではなく、複素数と考えなければならない（この点については次章で論じる）。
するとqは、正弦関数のときのxのように、直線上の点ではなく、複素平面上の単位円板上の点とみなされる。

対称変換の特徴はよく似ている――単位円板に対する何らかの対称変換の群があり、アイヒラー生成関数は、その対称変換の群の作用のもとで不変なのである。
このタイプの不変性を持つ関数のことを、「モジュラー（福永注：係数）形式」と呼ぶ。

【101】
円板に対するそれらの対称変換は、とても豊かな内容を持っている。
次の図を見てみよう。ここでは円板が無限にたくさんの三角形に分割されている。
この対称変換は、これらの三角形を交換することで円板に作用する。
実際、任意の二つの三角形に対して、それらを交換する対称変換がひとつ存在する。
このような円板に対する対称変換は、きわめてデリケートな性質を持つのだが、その作用の仕方は、整数の群が直線に作用するときの対称変換が、区間［２πm，２π（m＋１）］だけずれることであるのと似ている。
正弦関数は、このタイプの対称変換のもとで不変であり、アイヒラーの生成関数は、円板に対する対称変換のもとで不変なのである。
本章の初めで簡単に述べたように、正弦関数は、直線上の調和解析に用いられる「倍音」（ハーモニック）（基本となる波）の、一番簡単な例である。
同様に、アイヒラー関数などのモジュラー形式は、単位円板上の調和解析に現れる調和関数（ハーモニクス）なのである。

［図8-1］

何光年も離れた数学がつながる

【102】
アイヒラーの驚くべき洞察は、素数を法とする“三次方程式”の解の個数は、ランダムに分布しているように見えるが、あるデリケートな対称変換に従う生成関数からもたらされるというものだった――そのことから、解の個数という数の集合には、隠れた調和と秩序が備わっていることがわかる。
同様にラングランズ・プログラムは、まるで黒魔術を使ったかのように、それまでは手が届かないと思われていた情報を、数と対称変換、そして方程式という、三種の糸が織りなす精緻なタペストリーに織り上げるのである。

【103】
しかし、こんな疑問を抱く人もいるだろう。
なるほどこうした結果には、それ独自の美しさはあるだろうし、互いにかけ離れている数学の領域間に驚くべきつながりがあるというのもわかった。
だが、それを何か実用的なことに応用する方法はあるのだろうか、と。

今のところ、この成果そのものが応用された例を、私はひとつも知らない。
しかし、ここで扱った、p個の元からなる有限体上の“三次方程式”（そこからいわゆる「楕円曲線」が出てくる）は、暗号の分野では広く用いられている。

そうであってみれば、アイヒラーの結果のようなものが、いつの日か、暗号アルゴリズムのように有力で普遍的な応用を見出したとしても、私は少しも驚かないだろう。

【104】
志村-谷山-ヴェイユ予想は、アイヒラーの得た結果の一般化である。
この予想は、任意の“三次方程式”について（ある種の穏やかな条件に従うものとして）、素数を法とする解の個数は、あるモジュラー形式の係数であると述べている。
さらに、その“三次方程式”と（ある種の）モジュラー形式との間に、一対一対応が成り立つというのである。

「一対一対応」を説明するために、五本のペンと五本の鉛筆があると考えてみよう。
ペンと鉛筆とが、それぞれ一本ずつ対応づけられるとき、それを一対一対応という。
一対一対応をつける方法はたくさんある。
しかし今の例では、ペンと鉛筆の長さが同じになるとしよう。
その長さが「不変量」であり、この方法では、長さという不変量が保存される。
もしもペンの長さが全て異なっていれば、「長さが保存される」という性質だけで、一対一対応は一通りに決まるだろう。

志村-谷山-ヴェイユ予想の場合、一方の対象は“三次方程式”である。
それはペンに相当する。
それぞれの方程式に対して、a_pが不変量となる（a_pはペンの長さに相当するが、この場合には不変量はひとつではなく、素数pによってラベルづけされた多くの不変量が存在する）。
一対一対応のもう一方の対象は、モジュラー形式であり、これは鉛筆に相当する。
それぞれのモジュラー形式に対し、係数b_pは、それに伴う不変量の集まりである（鉛筆の長さに相当する）。

志村-谷山-ヴェイユ予想は、“三次方程式”とモジュラー形式との間に、これらの量を不変に保つような、一対一対応が存在すると述べている。
つまり、任意の“三次方程式”に対して、すべての素数pで$a_p=b_p$であるようなモジュラー形式が存在し、その逆もまた真だと主張しているのである。

【105】
いよいよ志村-谷山-ヴェイユ予想とフェルマーの最終定理とのつながりについて説明しよう。
フェルマー方程式の解から、ある種の“三次方程式”を作ることができる。
しかしケン・リベットが、その“三次方程式”の素数を法とする解の個数は、志村-谷山-ヴェイユ予想によって存在が約束されているモジュラー形式の係数ではあり得ないことを示した。
それゆえ、志村-谷山-ヴェイユ予想がいったん証明されれば、そのような“三次方程式”は存在しないと結論される。
ということは、フェルマーの方程式にも解は存在しないということだ。

【106】
志村-谷山-ヴェイユ予想は驚くべき予想である。
というのは、a_pという数は、方程式の素数を法とする解の研究から出てきたものであって、数論の世界に属するのに対し、b_pという数は、モジュラー形式の係数であり、調和解析の世界に屬するからだ。
これら二つの世界は、何光年も離れているように見える。
にもかかわらず、両者は同じものを記述しているというのだ！

ガロア群の二次元表現とモジュラー形式の関係

【107】
志村-谷山-ヴェイユ予想に登場する役者を変えれば、ラングランズ・プログラムの特殊ケースになる。
そのためには、志村-谷山-ヴェイユ予想に登場する“三次方程式”を、ある種のガロア群の二次元表現で置き換える。
その表現は、“三次方程式”から自然に得られ、その表現に対して（“三次方程式”にたいしてではなく）a_pという数を付随させることができる。
つまりこの場合には、志村-谷山-ヴェイユ予想は、ガロア群の二次元表現とモジュラー形式の間の関係として表されることになる。
（第2章で述べたように、群の二次元表現とは、二次元空間つまり平面に対する対称変換を、その群の要素に結びつけるルールである。
第2章では、円周群の二次元表現について説明した。）

【108】
さらに一般に、ラングランズ・プログラムに登場するさまざまな予想は、思いもよらない深いレベルで、ガロア群のn次元表現（志村-谷山-ヴェイユ予想における“三次方程式”に結びついた二次元表現を一般化したもの）と、「保型関数」（志村-谷山-ヴェイユ予想におけるモジュラー形式を一般化したもの）とを結びつけるのである。

ラングランズ・プログラムに登場するさまざまな予想が真であることは、ほとんど疑う余地がないのだが、過去45年間にわたり、すでに数世代に及ぶ数学者たちにより膨大な努力がつぎ込まれたにもかかわらず、その多くは今日なお証明されていない。

数学者は予想をどのように思いつくのか？

【109】
数学者は、どうやってこんな予想を思いつくのだろうか？
これは数学的洞察の本性に関わる、とても難しい問いである。
それまで誰も見たことのないパターンやつながりを見る力は、そう簡単に身につくものではない。
普通そのためには、何年とは言わずとも、何カ月もの間懸命に努力を重ねることになる。
最初は、新しい現象や理論がぼんやり見え始める。
その光景は我が目を疑うようなものだ。

しかしそのうちに、「もしもそれが本当だったら？」と考え始める。
試しに少し計算をしてみて、自分のアイディアが正しいかどうか、感触を得ようとする。
そういう計算はときに困難で、膨大な数式の山をかき分けて進まなければならないこともある。
計算ミスを犯す可能性はきわめて高く、最初からうまく行くことはまずない。
それでも、決してあきらめずに何度でもやり直す。

そうして、1日の終わりには（あるいはひと月、または一年の終わりには）、初めに得たアイディアは間違いだったことが判明し、別のアイディアを試さざるを得なくなることも多い。
思うようにいかずに頭を抱え、絶望的な気持ちになることもある。
不毛な試みに莫大な時間を費やしたのではないかと、やりきれない思いもする。
それでも、絶対に諦めない。
また黒板の前に戻って、データの分析を続ける。
するとごく稀にだが、不意にアイディアが動き始めることがある。

【110】
志村-谷山-ヴェイユ予想の主張は、それを提唱した人たちの目にさえ、最初は馬鹿げたものに見えたはずだ。
なるほどこの予想は、アイヒラーの結果（のちに志村により一般化された）をはじめ、先行する仕事の上に打ち立てられたものだ。
アイヒラーの得た結果は、「“三次方程式”の中には、pを法とする解の個数が、モジュラー形式の係数になっているものがある」というものだった。
しかし、すべての“三次方程式”についてそれが言えるというのは、当時としては突拍子もないアイディアだったろう。

その「信仰の飛躍」を最初に遣って退けたのが、日本の数学者、谷山豊だった。
谷山はそれを、1955年9月に東京と日光で開かれた代数的数論についての国際シンポジウムの席で、ひとつの疑問として提起したのだ。
私はずっと、なぜ谷山はこんな馬鹿げたアイディアを信じるようになったのか不思議でならなかった。
その予想はのちに、谷山の友人であり研究仲間でもあった、もうひとりの日本の数学者、志村五郎の手でより厳密なものにされた。
志村はその生涯の大半をプリンストンで過ごし、現在は名誉教授となっている。
彼は数学に数々の大きな貢献をし、ラングランズ・プログラムに直接関係する仕事も多い。
また志村は、この分野で自身の名を冠する基本的な概念をいくつか生んでいる（「アイヒラー-志村の合同関係式」や「志村多様体」など）。
谷山に関する施策に満ちたエッセーの中で、志村は次のような意外な発言をしている。

> 彼は決して杜撰というわけではなかったが、たくさんの間違いを犯す、それもたいていは正しい方向に間違うという特別な才能に恵まれていた。
> 私にはそれがうらやましく、真似しようとしてみたが無駄だった。
> そうしてわかったのは、良い間違いを犯すのは非常に難しいということだ。

志村の言葉によれば、1955年９月に東京と日光で開かれたシンポジウムでの谷山は、「あいまいで厳密とは言えない表現を取っていた」という。
彼の記述にはいくつか修正が必要だったのだ。
それでもなお、彼の予想は革命的な洞察であり、20世紀の数学における、最も重要な仕事のひとつにつながっていく。

【111】
この予想に名前を連ねる第三の人物が、アンドレ・ヴェイユである。
彼は20世紀の数学における、紛れもない巨人のひとりだ。
ヴェイユは、ラングランズ・プログラムと特別なかかわりがある。
アンドレ・ヴェイユが特別なのは、ラングランズ・プログラムとは何かを理解するのに、彼が妹への手紙に輪郭を描いて見せた、「数学の大きな絵」というプリズムを通して見るのが一番だからなのだ。
その「大きな絵」がわれわれにとっては、ラングランズ・プログラムを幾何学の領域に持ち込むための、足掛かりとなってくれるだろう。

第９章　ロゼッタストーン

数論と調和解析の間だけではない。幾何学や量子物理学に至るまでまったく違うと思われていた体系に密接な関係があるらしいことが分かってきた。
そのことの意味は、ある領域で分からない事柄も他の領域を使って解くことができるということだ。

獄中からの数学者の手紙

【112】
第二次大戦中の1940年、アンドレ・ヴェイユは兵役を拒否して投獄されていた。
ヴェイユは監獄の中から、有名な哲学者であり、神や人間の本質を深く考察した妹のシモーヌ・ヴェイユに宛てて、一通の手紙を書いた。
そこには注目すべき内容が盛られていた。
彼はその手紙に、自分の眼に映る「数学の大きな絵」のことを、やさしい言葉で語ったのである。
彼はこれにより、全ての数学者にひとつのお手本を示した。
ヴェイユがその手紙に綴ったのは、数学におけるアナロジーの役割についてだった。
彼はそれを説明するために、自分が最も関心を寄せていたものを例に挙げた。
それは、数論と幾何学との間に成り立つアナロジーである。

【113】
そのアナロジーが、ランランズ・プログラムの発展に重要な役割を果たすことになったのだ。

ラングランズ・プログラムの根っこは、数論にある。
ラングランズは、数論の難しい問題、例えば素数を法とする解の個数のような問題を、調和解析――もう少し具体的には、保型関数の研究――の手法を使って解くことができるだろうと予想した。
もしもできれば、それはすごいことである。
なぜなら、まず第一に、それまで難攻不落と思われていた数論の難問を、新しいアプローチで攻略できるようになるから。
そして第二に、そんな方法が使えること自体が、数学の異なる領域の間に、深くて基本的なつながりが存在することをほのめかすからだ。
もしそんなつながりがあるなら、当然ながら、何がどうなっているのか知りたくなる。
一体どういうわけで、そんな隠れたつながりが存在するのだろう？
その理由は、今も十分に解明されてはいない。
志村-谷山-ヴェイユ予想ひとつだけでも、解決には長い時間を要した。
そしてこの予想は、一般的なラングランズ・プログラムの特殊ケースに過ぎず、まだ証明されていない同様の命題が、何百、何千とあるのだ。

【114】
では、そんな難しい予想を攻略するには、どんなアプローチを取ればいいのだろう？
ひとつの方法は、ひたすら努力を重ね、新しいアイディアや洞察を得ようとすることだ。
このアプローチはすでに取られており、大きな進展があった。
こうひとつのアプローチは、ラングランズ・プログラムの視野を広げようとすることだ。
ラングランズ・プログラムは、数論と調和解析という領域のそれぞれに重要な構造があり、それらの構造間につながりがあることを示唆している。
とすれば、ひょっとすると他の領域にも、同様な構造や、構造化のつながりが見つかるのではないだろうか？

【115】
実際、確かにそうであることが判明したのである。
数論と調和解析の場合と同様の不思議なパターンが、例えば幾何学や、さらには量子物理学においてさえ見つかることが、徐々に明らかになったのだ。
ある領域のパターンについて何か情報が得られれば、他の領域に見られるパターンの意味を探るヒントになる。
前に私は、ラングランズ・プログラムは、数学における大統一理論だと述べた。
それによって私が言わんとしたのは、このプログラムは、何らかの普遍的な現象が存在すること、そして異なる領域で見られる現象間につながりが存在することをほのめかすということだ。

【116】
そして私の信じるところによれば、ラングランズ・プログラムは、もとのラングランズ予想を大きく超えて、数学そのものを理解するための鍵を握っているのである。
らングランズ・プログラムは、今や広大な研究分野となり、数論、調和解析、幾何学、表現論、数理物理学などさまざまな領域で、多くの数学者がこれに取り組んでいる。
数学者たちは、相当異質な対象を調べているにもかかわらず、よく似た現象を見る。

そういう現象を手掛かりとして、一見バラバラに思える領域を、壮大なジグソーパズルのピースのように組み合わせているのだ。
私にとってラングランズ・プログラムへの入り口となったのは、カッツ・ムーディー代数に関する仕事だった。
その後、ラングランズ・プログラムについて学べば学ぶほど、このプログラムのいう領域間のつながりが、数学全体にあまねく存在することが分かり始め、私は心が踊った。

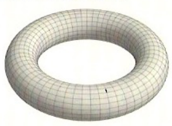
数論とリーマン面の対応

【117】
現代数学の異なる領域を、それぞれ別の言語だと考えてみよう。
いくつかの異なる言語で書かれた文があり、いずれも同じ内容が綴られているらしい。
そこで、それらの文を比較しながら、コツコツと辞書作りに取り掛かる——その辞書が完成すれば、数学のさまざまな領域の言葉を、相互に翻訳できるようになるだろう。
アンドレ・ヴェイユが与えてくれたのは、数論と幾何学とのつながりを理解するための枠組みだった。
それは、現代数学における「ロゼッタストーン」のようなものだ。

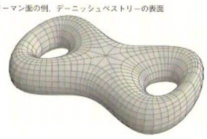
【118】
一方には数論の対象がある。
第７章で登場した有理数をはじめとする数体——例えば、有理数に√２を添加することによって得られる数体——や、それらの対称性を記述するガロア群などがそれだ。
他方には、いわゆるリーマン面がある。

〔図9-1〕 一番簡単なリーマン面である球面

〔図9-2〕 二番目に簡単なリーマン面はドーナツの表面



〔図9-3〕 リーマン面の例、デーニッシュペストリーの表面



リーマン面の中で最も簡単なのが、球面である。
次に簡単なリーマン面は、ドーナツのような形をしたトーラスだ。
ここで注意をしておくと、ここで考えるのはドーナツの「表面」であって、内部は考えない。
もうひとつ例を挙げると、デーニッシュペストリーのような形をした面も、やはりリーマン面である。
トーラスには「穴」がひとつ、デーニッシュペストリーには二つある。
リーマン面の穴の個数は、任意の自然数n＝３，４，５・・・であってよい。
数学者はリーマン面の穴の個数のことを、「種数」とよぶ。

リーマン面という名前は、19世紀に生きたドイツの数学者、ベルンハルト・リーマンにちなんでつけられたものである。
リーマンは、数学に重要な路線を切り開くような仕事をいくつも成し遂げた。
例えば曲がった空間の理論は、今日ではリーマン幾何学と呼ばれ、アインシュタインの一般相対性理論の基礎となっている。
アインシュタインの重力場方程式では、重力は「リーマンテンソル」という、時空の曲率を表す量で記述される。

一見すると、数論とリーマン面との間に共通するものがあるようには思えない。
ところが、両者の間には、いくつものアナロジーが成り立つのである。
鍵になるのは、これら両者の間に、もうひとつ別の数学的対象が存在することだ。

複素数とは何か

【119】
それを理解するためには、リーマン面は代数方程式で表せるということに気づかなければならない。
一例として、再び次の“三次方程式”を考えよう。

$$y^2+y=x^3-x^2$$

前に述べたように、このような方程式の解について語るときには、その解がどんな数の体系に属しているかを指定することが重要だ。
選択肢はたくさんあり、どんな体系を選ぶかによって、異なる数学理論が出てくる。

第8章では、素数を法とする解について述べたが、それもひとつの理論である。
あるいは同じ方程式の解を、「複素数」の中に探すこともできる。
そこからもまた別の理論が出てくる。
そしてその場合の理論から出てくるのが、リーマン面なのである。

【120】
実を言えば、複素数（コンプレックス・ナンバー）は、第７章で$\sqrt{2}$を理解するために出てきた数と比べて、特に複雑なわけではない。
第７章では、方程式$x^2=2$の二つの解を、$\sqrt{2}$および$-\sqrt{2}$と表記し、それらを有理数に添加したのだった。
今度は、方程式$x^2=2$の代わりに、方程式$x^2=-1$を考えよう。
この方程式の二つの解を、$\sqrt{-1}$および$-\sqrt{-1}$と表記し、有理数に添加してみよう。
これらは確かに、方程式式$x^2=-1$の解となっている。

$$(\sqrt{-1})^2=-1, \qquad (-\sqrt{-1})^2=-1$$

前の場合との違いは、微々たるものだ。
$\sqrt{2}$は有理数ではないけれども「実数」ではあるから、それを有理数に添加しても、実数の世界から離れることにはならない。

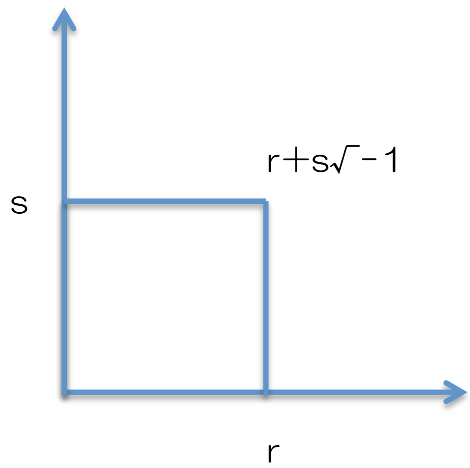
$\sqrt{-1}$ を有理数に添加して得た、この新しい体系に属する数は、複素数と呼ばれている。
個々の複素数は、次のように書くことができる。

$$r+s\sqrt{-1}$$

ここでrとsは有理数である。
このように表記された二つの数を足し算するためには、rの部分とsの部分を別々に足し算すればよい。
また、任意の二つの数の掛け算は、括弧を開き、$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$ を利用して計算すればよい。
同様にして、引き算と掛け算もできる。

最後に、この式に現れるrとsは任意の実数であってもよいことにして（つまり有理数に限定しない）、複素数の定義を拡張する。
こうして、最も一般的な複素数が得られる。
$\sqrt{-1}$ は慣習として i で表すが(i はimaginaryの頭文字)、私はあえてそれをしなかった。
その理由は、この数の代数的な意味をはっきり示したかったからだ。

複素数を幾何学的に表せば、実体のある数として感じられるだろう。
実数は、幾何学的には、直線上に並ぶ点として表されるのだった。
同様に複素数は、平面状に並ぶ点として表される。
つまり複素数$r+s\sqrt{-1}$ を、rとsを座標とする平面状の一点として表すのである。



トーラス上の点と“三次方程式”が一対一に対応する

【121】
ここで最初の“三次方程式”に戻ろう。

$$y^2+y=x^3-x^2$$

この方程式の解x、yを、複素数の範囲で探そう。

すると驚くべきことに、そのような解全体の集合は、トーラス上の点の集合と同じになることが分かるのだ。
別の言い方をすれば、トーラス上のどの点に対しても、上に示した“三次方程式”の解になる複素数x、yの組を、ひとつだけ割り当てることができるし、逆に、この“三次方程式”の解となる複素数がひとつ得られれば、トーラス上の一点が決まるのである。

数論とリーマン面の架け橋を見つける

【122】
代数方程式の解から幾何学的図形が生じるということを納得するために、もう少し簡単な状況で考えてみよう。
そのためには複素数ではなく、実数の解を考えてみるとよい。
例えば、次の方程式を考えよう。

$$x^2+y^2=1$$

そしてその解を、座標がxとyであるような平面上の点としてプロットしてみよう。
解の集合は、座標の原点を中心とする半径１の円となる。
同様に、他のいかなる二変数の代数方程式でも、実数値をとる解x、yは、この平面上の曲線になる。

【123】
さて、複素数はある意味で、実数を二つ合わせたものである（それぞれの複素数は、二つ一組の実数で決まる）。
そう考えれば、代数方程式の解であって、複素数の値をとる変数x、yがリーマン面になるのも、特に驚くべきことではないだろう（曲線は一次元であり、リーマン面は二次元だから。次元については第10章で説明する）。

【124】
実数と複素数の場合に加え、代数方程式の解x、yとして、
有限体｛0,1,2,・・・, p −2, p −1｝の中に値をとるものを探してもよい。
ここで、pは素数である。
これは、先の“三次方程式”にxとyを代入したときに、右辺と左辺がそれぞれ整数で、その値がpの整数倍だけ違っていてもよいということだ。
このとき得られるのが、数学者が「有限体上の曲線」と呼ぶ対象である。
もちろん曲線と言っても、いわゆる曲線ではない。
それらが曲線と呼ばれるのは、実数の範囲で解を求めるときに、平面上の曲線が得られるからに過ぎない。

【125】
ヴェイユの深い洞察は、最も基本的な数学的対象は、先の “三次方程式”のような、
代数方程式だということだった。

解をどの範囲で探すかに応じて、ひとつの方程式から、面が生じたり、曲線が生じたり、点の集まりが生じたりする。
しかしそれらはどれも、大いなる存在の「アバター」に過ぎない――その存在とはすなわち、方程式それ自体である。
それはヒンズー教のヴィシュヌ神が、十のアバター（アヴァターラ：福永注＝サンスクリット語で権化、化身、降臨の意）ないし化身（インカーネーション）を持つというのと似ている。

【126】
リーマン面と有限体上の曲線とのつながりは、もはや明らかだろう。
どちらも同じ方程式から生じるのだが、ただし解を探す領域が異なり、一方は有限体、他方は複素数の範囲で解を探すのである。
ヴェイユは、妹への手紙の中で、こう述べた。
「数論における議論や結果はどんなものも」、有限体上の曲線に「逐語的に翻訳できる」と。
つまり、数論とリーマン面との間に介在する数学的対象は、有限体上の曲線だ、というのがヴェイユの考えだったのだ。

【127】
こうしてわれわれは、数論とリーマン面との架け橋となるもの――ヴェイユ自身の言葉によれば、数論とリーマン面との間を、くるくると行き来する「ターンテーブル」――を見つけた。
それは、有限体上の代数曲線の理論である。
これを次のように言うこともできよう。
われわれの手元には、下のような三つのコラムがある。

ヴェイユのロゼッタストーン

数論	有限体上の曲線	リーマン面

【128】
ヴェイユはこれを使って、三つのうちのひとつのコラムに含まれるひとつの命題を、それ以外のコラムに含まれる命題に翻訳するつもりだった。
彼は妹への手紙に次のように書いた。

> 私の仕事は、三つの言語で書かれた文書を解読することだ。
> 三つのコラムのそれぞれについて、私の手元には小さな断片しかない。
> どの言語についても多少の知識があるとはいえ、コラムが変われば、意味もまた大きく異なることも分かっている。
> それについてあらかじめ知ることはできない。
> 私は何年もの間この仕事に取り組んで、翻訳のための辞書の小部分をいくつか作るに

至った。

ヴェイユはさらに研究を続け、ロゼッタストーンの応用法として、最も目覚ましいもののひとつを発見することになった——今日、ヴェイユ予想と呼ばれている一連の予想がそれである。
20世紀の後半、それらの予想を証明しようという試みが、数学を活気づけて大きく発展させることになる。

ロゼッタストーンの三つ目の言語

【129】
ラングランズの最初のアイディアは、ヴェイユのロゼッタストーンの左側のコラム、つまり数論に関するものだった。
彼は数体の表現（それは数論の対象である）を、保型関数（こちらは調和解析の対象）と関係づけた。
調和解析は、数論とは大きくかけ離れた領域である（それはまた、ヴェイユのロゼッタストーンの他の二つのコラムともかけ離れている）。
では、数体のガロア群の代わりに、ロゼッタストーンの真ん中のコラム、あるいは右側のコラムに含まれる何らかの数学的対象を考えたとすると、その場合にも何か、それと同じような関係は見つかるのだろうか？

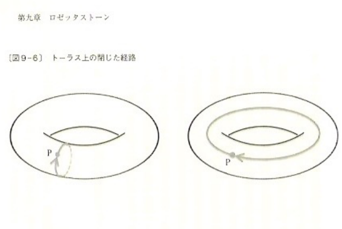
【130】
ラングランズ対応を、真ん中のコラム（有限体上の曲線）に当てはめるのは比較的簡単だ。
なぜなら、そのために必要なものは、すでにそろっているからだ。
真ん中のコラムに当てはめるためには、数体のガロア群の代わりに、有限体上の曲線に関するガロア群を考えればよい。
また、調和解析には、その場合にふさわしい保型関数の一領域がある。
実はラングランズは、もともとの予想を立てた時点で、有限体上の曲線に関するガロア群の表現と、保型関数とを関係づけていたのだった。

【131】
しかし、ラングランズ対応を、ロゼッタストーンの右側のコラム（リーマン面）に当てはめる方法については、ほとんど何もわかっていない。
それをするためには、リーマン面の理論において、ガロア群と保型関数のそれぞれに似たものを探し出さなくてはならない。
ラングランズが、自分の名を冠して呼ばれることになるアイディアを初めて定式化した時点では、前者は知られていたが、後者はまだ大いなる謎だった。
1980年代になってようやく、それらしい概念が発見されることになった——その路線を切り開いたのは、ロシア人数学者、ウラディーミル・ドリフェルドだった。
それが見出されたおかげで、ラングランズ対応を、ロゼッタストーンの三つ目のコラムに持ち込めるようになったのである。

トーラス上の閉じた経路

【132】
まずはじめに、幾何学的な対象であって、ガロア群とのアナロジーが成り立つようなものについて論じよう。
それは、リーマン面の「基本群」である。
基本群は、トポロジーという領域における、最も重要な概念のひとつである。
トポロジーの研究では、幾何学的図形が持つ性質の中でも、とりわけ特徴的なものに注目する（例えばリーマン面の「穴」の数、すなわち種数など）。

【133】
一例としてトーラスを考えよう。
トーラス上の一点を考え、それをPと呼ぶ。
Pに始まりPに終わる閉じた経路を考えよう。
図には、そのような経路を二つ示した。



トーラスの場合と同様に、与えられた任意のリーマン面の基本群は、ある決まった一点Pに始まりPに終わる、そのリーマン面上の閉じた経路を元とする群である。

Pに始まりPに終わる二つの経路が与えられたとして、第三の経路を、次のように構成する——まず第一の経路をくるりとたどり、それから第二の経路をくるりとたどる。
こうすると、やはりPに始まりPに終わる、新しい経路が得られる。
この方法による閉じた経路の「足し算」は、第２章で示した、群が満たすべき特徴をすべて満たしている。
かくしてこれらの経路は、確かに群になっていることがわかる。

上の図で、トーラスの二つの経路は互いに交換する——つまり、足し算をするときの順番には二通りあるが、足し算の結果は、順番によらずその基本群の同じ元になる。
したがって、トーラスの基本群の元を、最大限に一般的に表すとすれば、第一の経路をM回たどり、第二の経路をN回たどる、という形になるだろう。
ここで、MとNは整数である（もしもMが負の整数なら、第一の経路を逆向きに- M回たどるものとする。Nが負の整数の場合にも同様である）。
二種類の基本経路は互いに交換するのだから、これらの経路をどんな順番でたどるかは重要ではない。
どうやっても結果は同じになる。

トーラス以外のリーマン面では、基本群の構造はもっと複雑になる。
そして、経路同士は必ずしも交換しない。

【134】
ガロア群と基本群との間に深い類似性があることが示されてから、もうだいぶ時間が経っている。
そしてこれが、第一の問い、すなわち「ヴェイユのロゼッタストーンの右側のコラムにおいて、ガロア群とのアナロジーが成り立つ数学的対象は何か」という問いへの答えだ。
その対象は、リーマン面の基本群なのである。

次なる問題は、ラングランズ対応でガロア群の相方となる保型関数とのアナロジーが成り立つ対象を見いだすことである。
ここでわれわれは、量子飛躍ともいうべき、大胆な思考の飛躍をしなければならない。
というのも、古く良き「関数」では、その役目は担えないからである。
保型関数とのアナロジーが成り立つのは、高度に洗練された現代数学の対象、「層」なのである。

【層−用語解説：与えられた多様体の各点に対して、ひとつのベクトル空間を割り当てるルールであって、ある自然な特性を満たすもの】
【多様体−用語解説：円周、球、ドーナツの表面のような、なめらかな幾何学的図形】

【135】
層は、1980年代にウラディーミル・ドリンフェルドによって提唱された概念である。
ドリンフェルドは、ロゼッタストーンの真ん中のコラム（有限体上の曲線）と右のコラム（リーマン面）に応用できる、ラングランズ・プログラムの新しい定式化を与えた。
ドリンフェルドの定式化は、今日では幾何学的ラングランズ・プログラムとして知られている。
特にドリンフェルドは、ヴェイユのロゼッタストーンの右側のコラムにふさわしい、保型関数とのアナロジーが成り立つ対象を見出したのである。

【136】
私がドリンフェルドに会ったのは、1990年の春、ハーバード大学でのことだった。
彼は、ラングランズ・プログラムの話をして私を大いに刺激してくれただけでなく、このプログラムを発展させる上で、私にも演じるべき役割があると言ってくれた。
ドリンフェルドは、幾何学的ラングランズ・プログラムと、私がモスクワでの学生時代にやった仕事とのつながりに気づいたのである。
私の得た結果は、ドリンフェルドの新しいアプローチに不可欠であり、この出会いが、数学者としての私の人生を形作ることになった——そのとき以来、ラングランズ・プログラムは私の研究の柱となっている。

第10章　次元の影

写真は実は時間という次元を加えた四次元の世界を二次元に落とし込んでいる影と考えることができる。数学は四次元以上の高次元を、三次元、二次元の世界に落とし込み記述することで、より複雑な世界を理解する唯一のツールなのだ。

【137】
有限な要素を持つすべての群からなる、「有限群」という数学的概念がある。
第２章では、正方形の机の対称変換からなる群の話をしたが、その群は四つの元から構成されているため、有限群である。
同様に、多項式の解を有理数に添加することで得られる数体のガロア群も、やはり有限群である（二次方程式の場合なら、そのガロア群は二つの元からなる）。

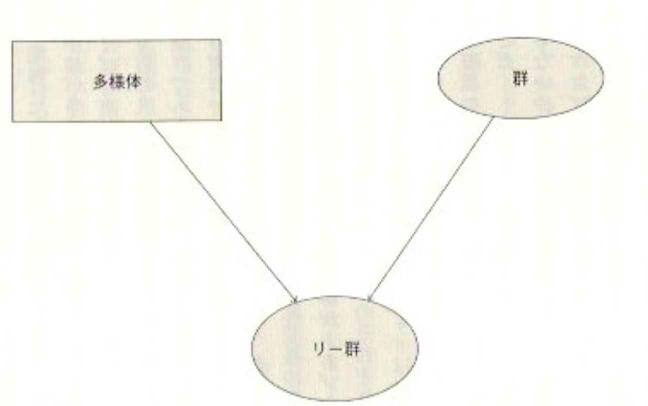
有限群とは別に無限群がある。
例えば整数の群は無限群であり、丸い机の回転の群は、円周上のすべての点からなり、やはり無限群である。

【138】
しかし整数の群と円周群との間には、ひとつ重要な違いがある。
整数の群は離散的だということだ――つまり、この群の元をどう組み合わせても、連続的につながった形を持つ図形にはならないのである。
ある整数から次の整数へと、連続的に進むことはできない。
ぴょんぴょんとジャンプして、隣の整数に飛び移るしかない。

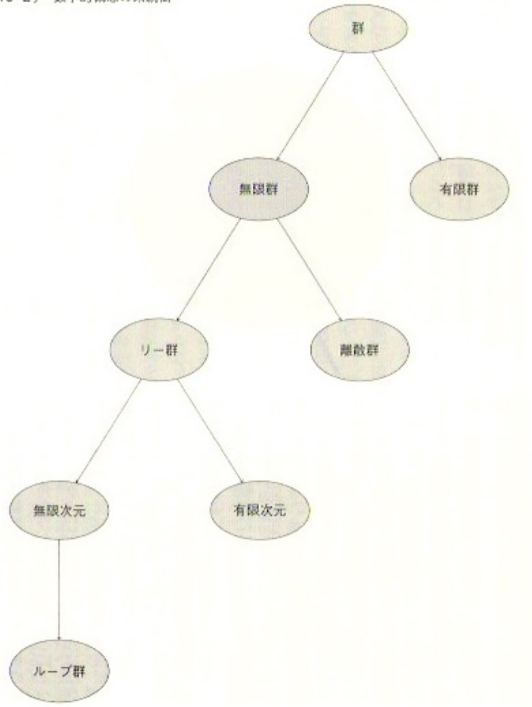
それとは対照的に、回転角は０度から360度まで、連続的に変化させることができる。
そして、すべての角度を合わせたものは、円という、つながったひとつの図形になる。
数学者はそのような図形のことを、「多様体」とよんでいる。

整数の群は、数学の世界では、無限離散群という群に属する。
また、円周群はそれとは別の、リー群という群に属する。
簡単に言うと、リー群は、その元が多様体上の点になっているような群である。
したがって、リー群という概念は、群と多様体という、二つの異なる数学的概念の結婚から生まれた子供なのだ。

〔図10-1〕 リー群は群と多様体の子どものようなもの



〔図10-2〕 数学的概念の系統樹



自然界に現れる多くの対称変換は、リー群によって記述することができる。
リー群の研究が非常に重要なのはそのためだ。
例えば、第２章で述べたSU(3)は、素粒子を分類するために使われている群だが、これもリー群である。

【139】
もうひとつ、リー群の例を挙げると、それは球面の回転群だ。
丸い机の回転は、回転角をひとつ与えることによって指定される。
しかし球面の場合には自由度が増え、回転角だけでなく、回転の軸を指定しなければならない。
その様子を下の図に示した。

〔図10-3〕 球面の回転を記述するためには角度のほかに回転軸を指定しなければならない

回転の軸としては、球の中心を通る直線ならどれを取ってもよい。

球面の回転群には、三次元空間の特殊直交（Special Orthogonal）群――省略して、SO(3)と書く――という名前が与えられている。
球面の回転という対称変換を、その球面が埋め込まれている三次元空間の方を回転させる対称変換に移し替えて考えてみよう。
この群の名前に含まれる「直交」という言葉は、空間に変換をほどこす前後で、すべての距離が保存されるという意味だ。

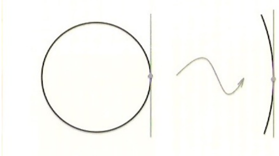
実は、この三次元空間の回転が、SO(3)という群の三次元表現のひとつになっているのである。

同様に、丸い机の回転群は、SO(2)と呼ばれている。
これらの回転は、平面（二次元空間）の特殊直交変換である。
こうしてわれわれは、SO(2)の二次元表現のひとつを得たことになる。

【140】
SO(3)とSO(2)は、群であるだけでなく、多様体（つまりは幾何学的な図形）でもある。
SO(2)という群は円周であり、円周は多様体である。
その意味において、SO(2)はリー群なのである。
同様に、SO(3)という群の元も、それとはまた別の多様体上の点になっているのだが、その多様体を視覚的に思い浮かべるのは少々難しい（あらかじめ言っておくと、その多様体は球面ではない）。
球面の回転はすべて、回転軸と回転角により指定されるのだった。
球面上のすべての点に対して、回転軸がひとつ決まることに注目しよう――その点と球の中心とを結ぶ直線を、回転軸とすればよい。
回転角は、円周上の点と同じである。
したがって、SO(3)という群の元は、球面上の一点（回転軸を指定するもの）と、円周上の一点（回転角を指定するもの）とによって決まる。

【141】
もう少し簡単な問いから始めた方がよいのかもしれない。
SO(3)の次元はいくつだろう？
この問いに答えるためには、次元という言葉の意味を、少し系統的に説明する必要がある。
われわれの周囲を取り巻くこの世界は、三次元空間である。
それはつまり、空間の一点を指定するためには、三つの数（あるいは座標）（x、y、z）が必要になるということだ。
また、平面は二次元である。
実際、平面上の一点を指定するためには、二つの座標（x、y）があればよい。
直線は一次元であり、座標ひとつで。直線上の一点を指定することができる。

【142】
では、円の次元はどうだろう？
二次元、と言いたくなるところだ。
なぜなら、普通われわれは平面上に円を描き、その平面は二次元だからである。
しかし、与えられた幾何学的対象（今の場合は円周）の次元に対する数学的定義は、その対象上の任意の位置を指定するために必要な、その対象上の独立な座標の数なのである。
その座標の数は、対象が埋め込まれているランドスケープ（今の場合は平面）の次元とは何の関係もない。
重要なのは、円周上の任意の点の位置が、たったひとつの数、つまり角度で表されるということだ。
その角度が、円周上の唯一の座標であり、それゆえ円周の次元は一次元なのである。



同様に、球面は三次元空間に埋め込まれているが、球面それ自体の次元は二である。
実際、球面上の独立な座標は、二つ——経度と緯度——なので、球面は二次元であることがわかる。
では、リー群SO(3)はどうだろう？
SO(3)の各点は、球面の回転であり、それゆえ座標は三つある——すなわち、回転軸（これは＜福永注：経度と緯度という＞二つの座標で指定される）と、回転角（第三の座標）である。
したがって、SO(3)という群の次元は、三である。

四次元以上を数学の力で記述する

【143】
われわれには四次元空間を視覚的にイメージすることはできないが、数学的対象として具体的に描き出すことはできる。
そのためには、三次元空間の点を三つ組の数（x、y、z）で表すのと同じく、四次元空間の点を、四つ組の数（x、y、z、t）で表せばよい。
同様に、任意の自然数nについて、n次元の平坦（フラット）な空間の点を、n個の数で表すことができる（第２章で述べたように、それをスプレッドシートで横に並んだ項目と考えてみよう）。

【144】
ここで空間がフラットだ——「平べったい」——とはどういう意味かを説明しておこう。
直線や平面が平べったいのはいいとして、三次元空間が平べったいとはどういう意味だろう？（今考えているのは、球面やトーラスのように、三次元空間に埋め込まれた、曲がった多様体ではないという点に注意しよう。ここでは三次元空間そのものを考えているのである。）
平坦な空間とは、曲率がゼロであるような空間のことである。
曲率を数学的に厳密に定義するのはなかなか難しいのだが、われわれの目的にはあまり関係がないので、ここでは立ち入らない。
平坦な三次元空間の感じをつかむには、平面には互いに直交する無限に長い座標軸が二本あるのと同様に、互いに直交する無限に長い座標軸が三本あるという点に着目するのがよい。
また、互いに直交する無限に長い座標軸がn本あるn次元空間は、曲率がゼロであり、それゆえ平坦である。

【145】
物理学者は何百年もの間、われわれは平坦な三次元空間に住んでいるものと考えていたが、アインシュタインは一般相対性理論において、物質が存在すれば空間は曲がることを示した（われわれが空間の曲がりに気づかないのは、その曲率がとても小さいからだ）。

つまり、われわれが住むこの空間は、曲がった三次元多様体の一例なのである。

このことから、次のような疑問が生じる。
例えば、三次元空間に埋め込まれた球面のように、より高い次元の空間に埋め込まれているのではなく、曲がった空間が、何にも支えられずに存在するということは可能なのだろうか？
われわれは、周囲の空間は平坦だという考えに慣れ切っているし、日常生活で出会う曲がった物体はどれも、平坦な三次元空間に埋め込まれたものとして存在しているように見える。
だがそれは、自然界を見るわれわれの視野が狭いせいで生じる、思い込みなのだ。
何しろ、そもそもわれわれを取り巻くこの空間自体が、曲がったり歪んだりするような存在なのだ！

数学はわれわれに、この知覚の落とし穴から抜け出す手段を与えてくれる。
リーマンが示したように、曲がった空間は、平坦な空間に埋め込まれている必要はなく、それ自体として存在できるのである。
曲がった空間を定義するためには、その空間の任意の二点間の距離を測るためのルールが必要だ（そのルールには、いくつかの自然な特徴が備わっていなければならない）。
そのルールのことを、数学者は「計量」と呼んでいる。
リーマンが導入した「計量」と「曲率テンソル」という数学的概念は、アインシュタインの一般相対性理論の基礎となっている。

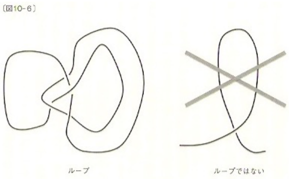
【146】
曲がった幾何学的図形、すなわち多様体は、どれほど高い次元でもよい。
円（円周）とは、与えられた一点からの距離が等しい、平面上のすべての点の集合として定義されるのだった。
同様に、球面は、与えられた一点からの距離が等しい、三次元空間内のすべての点の集合である。
さて、それよりも高い次元で球面に対応するもの――それを超球と言うこともある――を、n次元空間内の与えられた一点からの距離が等しい点の集合と定義しよう。
この定義が、n個の座標成分が満たすべき拘束条件となる。
したがって、n次元空間内の超球の次元は（n−１）である。
さらに、この超球の回転に関するリー群を調べることもできる。
その群をSO(n)と書く。

【147】
リー群は、有限次元のリー群（円周群やSO(３)はそれに含まれる）と、無限次元のリー群に分類される。
有限次元のリー群は、その次元がどうであれ、元が無限にたくさんあるという意味では、すでに無限だという点に注意しよう。
例えば、円周群には無限にたくさんの元があるが（この群の元は、円周上の点なのだった）、この群の次元は一次元である。
なぜなら、円周群の元はすべて、ひとつの座標z（角度など）で記述できるからだ。

それに対して、無限次元のリー群の元を記述するためには、無限にたくさんの座標が必要になる。
そういう「二重に無限」な群を、視覚的にイメージするのはとても難しい。
しかし自然界を調べていると、確かにそのような群に出会うので、どれほどイメージしにくかろうと、無限次元のリー群もやはり調べる必要があるのだ。
そんな無限次元のリー群の一例として、「ループ群」として知られているものを見てみよう。

無限次元のリー群、「ループ群」

【148】
まず三次元空間内のループを考えよう。
ループとは、簡単に言えば、閉じた曲線のことである。
下の図の左側に、そんなループの一例を示した。
右側のような、閉じていない曲線は、ループとは考えない。



同様に、任意の多様体Mの内部に、ループ（閉じた曲線）を考えることができる。
そのようなループすべてからなる空間のことを、多様体Mのループ空間と呼ぶ。
物理学におけるひも理論では、このようなループが大きな役割を演じている。
普通の量子物理学では、基本的な物理的対象は、電子やクォークなどの素粒子である。
それらは内部構造を持たない点状粒子で、次元はゼロである。
それに対してひも理論では、自然界の基本構成要素は、一次元のひもだとされる。
両端がつながったひもは、多様体M（ここでは時空）に埋め込まれたループに他ならない。
ループ空間がひも理論の基礎になっているのはそのためだ。

【149】
さて、リー群SO(3)のループ空間を考えよう。
そのループ空間を構成する要素は、SO(3)内のループである。
そんなループのひとつをじっくり調べてみよう。
第一に、それは上の図の左側に示したループと似ている。
実際、SO(3)は三次元なので、小さいスケールでは、平坦な三次元空間のように見えるのだ。
第二に、そのループ上のひとつひとつの点が、SO(3)の元——球面の回転——になっている。
このことから、ここで考えているループは、洗練された数学的対象であることがわかる——それは、球面の回転の一パラメーター（いちパラメーター）族なのだ。
そんなループが二つ与えられたとしよう。
このとき、それら二つのループに対応する球面の回転を合成して、第三のループを作ることができる。
これにより、SO(3)のループ空間はひとつの群となる。
それをSO(3)のループ群と呼ぶ。

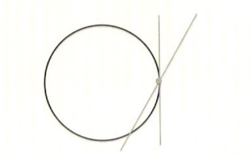
このループ群は、無限次元のリー群の好例であり、有限個の座標では、この群の元を記述することはできない。
これ以外のいかなるリー群（例えば超球の回転についての群SO(n)など）のループ群も、やはり無限次元のリー群である。
ひも理論では、これらのループ群は対称群として現れる。

【150】
私が勉強していたフェイギンとフックスの論文には、もうひとつ、リー代数という重要な概念が含まれていた。
リー代数は、ある意味では、リー群を簡単化したバージョンである。

【福永注（ブリタニカから）：リー代数＝リー群から、微分作用素の代数としてつくられる.】。

ここでは「線形化」という、微積分の重要な概念に沿って見ていこう。
線形化とは、曲がった形を、まっすぐな——つまり平坦な——もので近似することだ。
例えば、与えられた一点で円に接する空間は、その点を通る直線であって、この点を通るすべての直線のうち、円に最も近いものである。
接線は、ある特定の点で円に接する直線である。
この点を通る他のすべての直線は、もうひとつの点で円と交わる。

〔図10-7〕 接線以外のすべての直線は、もうひとつの点で円と交わる



それと同様に、いかなる曲線（一次元多様体）も、ある与えられた一点の近くでは、一本の接線で近似することができる。

円周の場合と同様に、球面もまた、与えられた一点における接平面で近似することができる。
例えばバスケットボールを床に置くと、ボールは一点で床に接し、床はその点におけるボールの接平面となる。
同様に、n次元多様体は、与えられた点において、n次元の平坦な空間で近似することができる。

【151】
さて、任意のリー群［それは多様体でもある］上には、ひとつ特別な点がある——この群の単位元である。
その点における、リー群の接空間を考える——すると驚いたことに、それがこのリー群のリー代数になるのだ。
このように、リー群はすべて、それに付随するリー代数を持つ。
リー代数は、いわばリー群の妹のようなものだ。
例えば、円周群はリー群であり、その単位元は、円周上で角度０に対応する点である。

この点において円周に引いた接線は、これまで説明した理由により、円周群のリー代数になる。
残念ながら、われわれはSO(3)という群を図に描くことができず、それゆえ、その接空間を示すこともできない。
なぜなら、SO(3)もその接空間も、三次元だからである。

【152】
しかし、接空間を記述する数学理論は、すべての次元で使えるように作られている。
そんな数学理論の有効性を確かめたければ、一次元（円周）や二次元（球面）の場合に当てはめてみればよい。
そしてそれら低次元の多様体を、高い次元の複雑な多様体のメタファーと考えるのだ。
われわれの視覚的な直観は貧しいものでしかないが、数学の言葉はその限界を乗り越えさせてくれる。
数学的には、n次元のリー群のリー代数は、n次元の平坦な空間なのだ。
そのような空間を、ベクトル空間と呼ぶ。［線形空間ともいう。］

【153】
しかも話はそれで終わりではない。
リー群上の掛け算から、リー代数上でのひとつの演算が生じる。
つまり、リー代数の任意の二つの要素が与えられたとき、それから第三の要素を作ることができる。
この演算は、リー群の掛け算よりもわかりにくいだけでなく、当面、われわれにとってそれほど重要ではない。
ベクトル演算を勉強したことがある読者にはおなじみの例に、三次元空間における「外積」がある。
外積を見たことがある人は、奇妙な演算だと思ったかもしれない。
ところが意外にも、この演算により、三次元空間がリー代数になるのだ！
何を隠そう、それがリー群SO(3)のリー代数なのである。
そんなわけで、難しそうに見える外積という演算は、球面の回転の合成則から、その性質を受け継いでいるのである。

【154】
リー代数の演算がそれほど奇妙だというなら、なぜそんなものを考えなければならないのか、と不思議に思う人がいるかもしれない。
リー群だけ考えていればよいではないか？
リー代数を考える主な理由は、普通は曲がっているリー群と異なり(例えば円周のように)、リー代数は平坦な空間（直線や平面などのように）だからである。
平坦であるおかげで、リー代数を調べるのは、リー群を調べるよりずっと容易なのだ。
では、ループ群のリー代数はどんなものになるのだろうか。
この場合のリー代数は、いわばループ群の簡略版で、二人の数学者ヴィクター・カッツとロバート・ムーディーにちなんで、「カッツ-ムーディー代数」と呼ばれているものになるのである。
カッツとムーディーは、1968年にそれぞれ別個にこれらリー代数の研究に取りかかった。

それ以来、カッツ-ムーディー代数の理論は、さまざまある数学の領域の中で、最もホットで成長著しいもののひとつとなっている。

高次元の問題を、三次元、二次元に落とし込む

【155】
フックスが、私の次の研究プロジェクトにどうかと勧めてくれたのは、そのカッツ-ムーディー代数だった。
フェイギンとフックスの長い論文をようやく私が読み終えたのは、1987年の１月のことだった。
前に述べたように、カッツ-ムーディー代数は、ひも理論に重要な役割を演じているのだが、それだけでなく、量子物理学の二次元モデルの対称変換としても、物理学に登場していたのである。
われわれの暮らすこの世界は三次元空間なので、この世界を記述する現実的なモデルは三次元でなければならない。
そこに時間を含めれば、四次元である。
しかし数学的なことを言えば、それ以外の次元の世界を記述するモデルを作り、そのモデルで何が言えるのかを調べてみることには何の問題もない。
三次元よりも低い次元のモデルは、より簡単で扱いやすいので、解ける可能性も高くなる。
そんな簡単なモデルから得られた知識を使って、より難しい三次元、あるいは四次元のモデルに取り組むことができる。

【156】
実はこれは「数理物理学」と呼ばれる領域の、主要な考え方のひとつなのである。
われわれの物理的世界にそのまま当てはめることはできなくとも、現実的なモデルと顕著な共通点を持つような、異なる次元のモデルを調べてみるのだ。
低次元のモデルの中には、現実世界に当てはまるものもある。
例えば、非常に薄い金属の層は、二次元の系とみなせるので、二次元モデルでうまく記述できる可能性がある。
二次元格子の格子点に位置を占め、互いに相互作用をするような粒子を記述する、いわゆるイジング・モデルは、そんな二次元モデルのひとつである。
イジング・モデルの厳密解は、ラース・オンサーガーによって得られ、それにより自発磁化——いわゆる強磁性——について重要な洞察がいくつももたらされた。

【157】
オンサーガーの計算の中核にあったのが、このモデルの隠れた対称性だった。
物理系を理解する上で、対称変換が果たす重要な役割を、あらためて痛感させられたケースである。
のちにその対称変換は、カッツ-ムーディー代数の近い親戚に当たる、いわゆるヴィラソロ代数によって記述されることが判明した（実は、私が勉強していたフェイギンとフックスの論文の主要なテーマは、そのヴィラソロ代数だった）。
このタイプのモデルの中に、カッツ-ムーディー代数だけで対称変換が記述されるような、ひとつの大きなクラスが存在する。
カッツ-ムーディー代数の数学理論は、それらのモデルを理解するためには必要不可欠なのだ。

第14章　「層」という考え方

新しい仲間、ドリンフェルドもまたソ連の反ユダヤ主義の犠牲者だった。後にフィールズ賞を受賞する彼は、モスクワに仕事を得ることすらできなかった。しかし、孤独の中で彼が発展させたのは、リーマン面を大統一に組み入れる「層」という考えだった。

ドリンフェルドとラングランズ・プログラム

【158】
ウラディーミル・ドリンフェルドは、私の研究の方向性を変えたのみならず、さまざまな意味において、私の数学者としてのあり方をも変えることになった。
それもこれも、**ラングランズ・プログラムのためである。**
当時彼はまだ36歳という若さだったが、すでに伝説の数学者だったのだ。
われわれが知り合って半年後には、ドリンフェルドはフィールズ賞を受賞した。

【159】
私がハーバードから招かれたのは、1989年9月だった。
ドリンフェルドがハーバードに招かれたのは、1990年の春のことで、それは私にとって奇跡ともいうべき幸運だった。
私にとってとりわけ重要だったのは、ドリンフェルドは私と会うなり、フェイギンと私の仕事に非常に興味があると言ったことだ。
ドリンフェルドはわれわれの仕事を、ラングランズ・プログラムに関係する、彼の新しいプロジェクトで使いたいと考えていたのである。

【160】
第９章で説明した､アンドレ･ヴェイユのロゼッタストーンの三つのコラムを思い出そう。

ヴェイユのロゼッタストーン

数論	有限体上の曲線	リーマン面

ラングランズ・プログラムはもともと、左側と真ん中のコラム――数論と、有限体上の曲線――の内部で発展させられたのだった。
ラングランズ・プログラムとは、要するにガロア群の表現と保型関数との間に、ひとつの関係性を打ち立てようとすることである。
ガロア群という概念は、ロゼッタストーンの左側と真ん中のコラムについては、そのまますんなり当てはまるし、調和解析という領域には、ちょうどいい保型関数が見出せる。

【161】
ドリンフェルドの仕事以前は、右側のコラムのリーマン面の理論について、ラングランズ・プログラムに相当するようなものがあるのかどうかは、明らかではなかった。
リーマン面をこのプログラムに含めるための方法は、1980年代の初期に、ドリンフェルドの仕事により姿を現し始め、フランスの数学者ジェラール・ローモンがそれに続く仕事をなし遂げた。
ドリンフェルドとローモンはラングランズ・プログラムを、アンドレ・ヴェイユのロゼッタストーンの真ん中と右側のコラムの両方に当てはまるように、幾何学的に再定式化できることに気づいたのだ。

【162】
ロゼッタストーンの左側と真ん中のコラムでは、ラングランズ・プログラムは、ガロア群と保型関数をつなぐものだった。
問題は、リーマン面に関する幾何学的な理論の中に、ガロア群と保型関数に類するものを見いだせるかどうかだった。
第９章で見たように、幾何学の理論においてガロア群の役割を演じるのは、リーマン面の基本群である。
しかし保型関数に類するような、幾何学的な対応物はまだ知られていなかった。
実は、幾何学的な理論において保型関数とのアナロジーが成り立つものは、関数ではなく、数学者が「層」と呼ぶものだったのである。

数からベクトルへ

【163】
層とは何かを説明するために、数について話をしよう。
数といえば、まずは自然数１、２、３、・・・だろう。
もちろん、自然数にはさまざまな使い道がある。
例えば、次元を指定するためにも使える。
第10章で論じたように、直線は一次元、平面は二次元だ。
任意の自然数nに対して、n次元の平坦な空間がある。
それをベクトル空間［線形空間］と言うこともある。
さてここで、自然数がベクトル空間で置き換えられた世界を想像してみよう――つまり、１の代わりに直線、２の代わりに平面を考えるのだ。

【164】
この新しい世界では、数の足し算は、数学者が「ベクトル空間の直和」と呼ぶもので置き換えられる。
二つのベクトル空間が与えられ、それぞれに座標系が決まっているとして、それらの座標を加えることにより新しいベクトル空間を作ったとすると、その空間の次元は、はじめの二つの空間の次元の和となる。

例えば、直線は一次元で、平面は二次元だから、これら二つのベクトル空間を足し算すると（直和空間を作ると）、三つの座標を持つベクトル空間が得られる。
つまりはおなじみの三次元空間である。

【165】
自然数の掛け算は、ベクトル空間に対する別の操作で置き換えられる。
二つのベクトル空間が与えられたとき、それらのテンソル積と呼ばれる第三のベクトル空間を作る。
テンソル積の厳密な定義は、ここでは与えない。
重要なのは、出発点にとった二つのベクトル空間の次元がmとnなら、そのテンソル積の次元はm・nになると言うことだ。

【166】
このように、ベクトル空間には、自然数における足し算と掛け算によく似た演算がある。
しかし、ベクトル空間というパラレルワールドは、自然数の世界よりもはるかに豊かなのだ！
数には内部構造がない。
例えば３という数には、いかなる対称性もない。
しかし、三次元空間には対称性があり、さまざまな対称変換をほどこすことができる。
実際、すでに見たように、リー群SO(3)の任意の元から、三次元空間の回転が生じるのだった。
現代数学は、数がベクトル空間として生き生きと動き出すような、新しい世界を作り出す。
その世界の中では、それぞれのベクトル空間が豊かで充実した個人生活を送り、他の世界との関係も意味深いものとなる――それらの関係は、単なる足し算や掛け算に還元されるようなものではない。
例えば、２から１を引き算する方法はひとつしかないが、平面内に直線を埋め込む方法は無数にある。

ベクトル空間における関数を考える

【167】
自然数は集合を作るが、ベクトル空間は、もっと洗練された構造を作る。
その構造のことを、数学者は圏（カテゴリー）と呼んでいる。
与えられた圏は、例えばベクトル空間のような「対象（オブジェクト）」を持っている。
それに加えて、どれかの対象を別の対象に移す「射（モルフィズム）」がある。
例えば、ある対象を、それ自体へと移すような射は、本質的には、その圏の内部で許される、その対象の対称変換である。
それゆえ圏の言葉を使えば、その対象がどんなものから構成されているかだけでなく、対象同士がどのように相互作用するのかも調べることができる。
そのため、圏に関する数学的理論は、とりわけコンピュータ科学に応用できることが明らかになっている。

【168】

関数プログラミング言語､例えばHaskell(ハスケル)が開発されたケースもその一例だが､近年このような応用例は枚挙に暇がない。
次世代コンピュータは、集合論ではなく、むしろ圏論に立脚するものになると見てまず間違いないだろう。
そして、そうと意識するかどうかによらず、圏はわれわれの日常生活にも入り込んでくるだろう。

【169】
集合から圏へのパラダイム・シフトは、現代数学の駆動力のひとつになっている。
その動きのことを「圏論化」と言う。
それはいわば、新しい世界を作ろうとしているようなものだ。
その世界においては、慣れ親しんだ概念が、より高いレベルのものに高められる。
例えば、数はベクトル空間に置き換えられる。
すると当然ながら、次なる疑問が浮かび上がる。
その新しい世界では、関数は何になるのだろうか？

【170】
この疑問に答えるために、まず関数の概念を見ておこう。
ある幾何学的対象、例えば球面や円周、あるいはドーナツの表面のようなものがあるとしよう。
それをSと表そう。
前に論じたように、数学者たちはそれらを多様体と呼ぶ。
多様体S上の関数fは、Sに含まれる各点sに、ひとつの数を割り当てるルールである。
その数のことを、点sにおける関数fの値と呼び、f(s)と書く。
温度は関数の一例である。
この場合、多様体Sは、われわれを取り巻く三次元空間にほかならない。
Sの各点sで温度を測定することができ、それぞれの測定値はひとつの数である。
したがって、温度計で測定するということは、空間の各点に、ひとつの数を割り当てるルールとなり、それはひとつの関数である。
同様に、気圧からもひとつの関数が得られる。

【171】
もう少し抽象的な例として、多様体Sが、円周である場合を考えよう。
円周上の各点は、角度を指定することによって決まる。
前と同様、その角度をφと呼ぼう。に
fを正弦関数とする。
円周上の角度φにおける値は、sin(φ)である。
φ＝30度（ラジアンで測るとすれば、π／6）とすると、正弦関数の値は１／２となる。
φ＝60度（π／３）なら、√３／２となる。

【172】
さて、多様体Sの各点に割り当てるものを、数からベクトル空間に変えてみよう。

そうすると、多様体S内の各点sに数を割り当てるルール（関数）の代わりに、ベクトル空間を割り当てるルールが必要になる。
そのような規則のことを、「層」と呼ぶ。
層をFで表すと、点sに割り振られたベクトル空間は、F(s)となる。

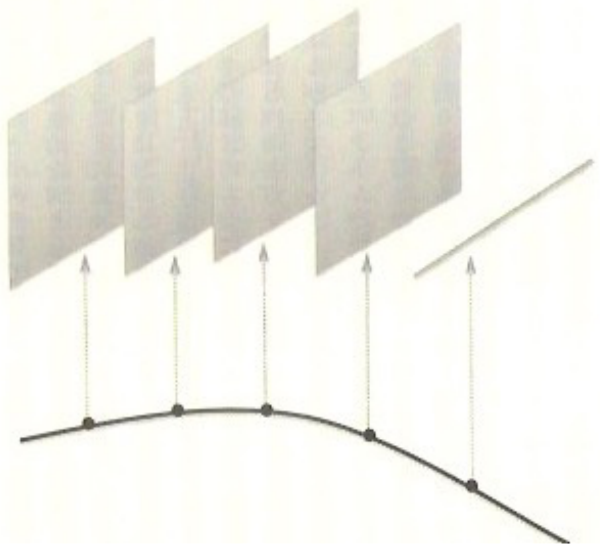
【173】
つまり、関数と層との違いは、多様体Sの各点に割り当てるものの違いなのだ。
関数の場合には、数を割り当てるのに対し、層の場合には、ベクトル空間を割り当てる。
与えられた層に対して、各点sごとに割り当てられるベクトル空間の次元は、それぞれ異なっていてもよい。
例えば、次の図（図14-1）では、ほとんどのベクトル空間は平面（二次元ベクトル空間）だが、ひとつは直線（一次元ベクトル空間）になっている。
ベクトル空間が、数の圏論化であるように、層は、関数の圏論化である。

フェルマーの小定理

【174】
本書で扱う範囲を超えているのだが、実は、層は、単に多様体の各点に割り当てられるベクトル空間のバラバラな寄せ集めではない。
与えられた層の、多様体の各点におけるファイバー［図の矢印の先にあるもの］は、厳密な一組の規制によって互いに関係づけられなければならないのである。

【175】
当面われわれにとって重要なのは、関数と層の間に、深いアナロジーがあるということだ。
それを発見したのが、偉大なフランスの数学者アレクサンドル・グロタンディークである。
彼はほとんど単独で、現代の代数幾何学を作ったのみならず、数学に対するわれわれの考え方をすっかり変えてしまった。
ラングランズ・プログラムを幾何学的に再定式化するためにわれわれは、関数と層との間で言葉を翻訳するための辞書を利用したが、その辞書こそは、グロタンディークの仕事を特徴づける深い洞察の見事な一例なのである。

〔図14-1〕 層は多様体の各点にベクトル空間を割り当てる



グロタンディークのアイディアの一番重要なところを感じ取ってもらうために、第8章で扱った有限体の概念を思い出そう。
素数pに対し、p個の要素を持つ有限体が存在する。
｛0,1,2,・・・,p－1｝。
前に論じたように、これらp個の元は、pを法とする、足し算、引き算、掛け算、割り算という演算を持つ、数の体系を構成する。
これらの演算は、有理数、および実数上で、これに対応する演算と同じルールに従うものとする。
しかし、この数の体系には、他とは異なる特殊な性質もある。
有限体｛0,1,2,・・・,p－1｝の任意の元をとり、それを前に説明したpを法とする算術と同じ意味において、p次のべきにすると、はじめと同じ数に戻るのだ！
つまり、

$$a^p = a \qquad \text{modulo} \quad p$$

となるのである。
この式を証明したのは、フェルマーの最終定理を考えついた数学者、ピエール・ド・フェルマーだった。
最終定理の場合とは異なり、これを証明するのはかなり簡単で、この本の余白にでもかけるほどだ。
この定理をフェルマーの最終定理と区別するために、フェルマーの小定理という。

【176】
例えば　p ＝ ５ とすると、有限体は｛0,1,2,3,4｝となる。
それぞれの要素を５次のべきにしよう。
０は、何次のべきにしようと０であり、１はやはり１である。
次に、２を５次のべきにすると、32となる。
しかし32＝２＋５・６だから、５を法とする演算では、この結果は２である――約束した通り、２に戻った。

３を５次のべきにすると、243だが、これは３＋５・48であるから、５を法とする演算では３であり、やはり最初の数３に戻った。
最後に、４の場合も試してみよう。
これの５次のべきは1024だが、５を法とする演算では、これは４である。
もうひとつ注目すべきは、これと同じタイプの方程式が、オンライン決済に広く用いられている、RSA暗号化アルゴリズムの基礎になっているということだ。
$a^p = a$という式は、ちょっと気の利いた発見といったものではない。
この式は、数をp次のべきにするという操作、つまりaをa^pにするという操作は、有限体のガロア群の元だということを意味しているのだ。
この操作は、フロベニウスの対称変換、もしくはフロベニウス写像と呼ばれている。
p個の元からなる有限体のガロア群は、フロベニウス写像によって生成されるのである。

数学における「層」とは何か？

【177】
グロタンディークのアイディアに話を戻そう。
はじめに、ヴェイユのロゼッタストーンの真ん中のコラムに注目しよう。
そして有限体上の曲線と、より一般的な有限体上の多様体について調べる。
これらの多様体は、多項方程式の系によって定義される。
例えば、第９章で扱った、

$$y^2+y=x^3-x^2$$

もそのひとつである。
そのような多様体上に、ひとつの層があると仮定しよう。
層は多様体上の各点に、ベクトル空間を割り当てるルールだが、実はさらに構造を持っている。
層の概念は、今考えている多様体が定義されている数の体系（この場合は有限体）の任意の対称変換から、そのベクトル空間の対称変換が生じるように定義されているのである。
特に、有限体のガロア群の元であるフロベニウス写像からは、このベクトル空間の対称変換（例えば回転や伸張など）が必然的に生じる。

【178】
さて、ベクトル空間に何らかの対称変換があれば、そこからひとつの数を作り出すことができる。
そのための標準的なテクニックがある。
例えば、今考えているベクトル空間が直線なら、フロベニウス写像から得られるこの空間の対称変換は伸張である――つまり、各元zが、ある数Aにより、A_zに変換される。
この対称変換から作られる数は、Ａに他ならない。
１よりも高い次元のベクトル空間に対しては、その対称変換のトレースと呼ばれるものを用いる。
一番簡単なのは、フロベニウス写像がベクトル空間の恒等変換になっている場合だ。
このとき恒等変換のトレースの値は、そのベクトル空間の次元の数に等しい。

フロベニウス写像のトレースをとることで、ベクトル空間に、その空間の次元の数を割り当てるわけだ。
しかし、もしもフロベニウス写像が恒等変換でなければ、ベクトル空間に割り当てる数は、自然数になるとは限らず、より一般的なものになる。

【179】
要するに、有限体｛0,1,2,・・・,p－1｝上に多様体Sがあり（ヴェイユのロゼッタストーンの真ん中のコラムを考えているとして）、S上に層Fがあるなら、Sの各点sに対して、ひとつの数を割り当てることができる。
これにより、S上の関数が得られる。
つまり、ヴェイユのロゼッタストーンの真ん中のコラムにおいて、層から関数へと進む方法が得られたわけだ。
グロタンディークはこれを、「層から関数への辞書」と読んだ。
しかしそれは奇妙な辞書である。
今述べた手続きを使うことにより、われわれは層から関数へと進むひとつのツールを得る。
さらに、層上の自然な演算は、関数上での自然な演算と同じだ。
例えば、二つの層の直和をとるという演算は、二つのベクトル空間の直和と同じように定義され、二つの関数の和をとる操作と同じになっている。

【180】
だが、関数から層へと戻る自然な方法はない。
それができるのは、ある種の関数だけであって、全ての関数でできるわけではないのだ。
しかし、もしもそれができれば、その層は、関数には持ち得ない付加的な情報をたくさん持っているだろう。
するとその情報を利用することにより、その関数の核心に迫ることができる。
注目すべき事実は、ラングランズ・プログラム（ヴェイユのロゼッタストーンの真ん中のコラムで）に現れる関数のほとんどは、確かに層に由来するということだ。

【181】
関数は数学全体を通じて重要な概念のひとつであり、数学者たちは何世紀も前から関数を研究してきた。
関数という概念は、温度や気圧を考えることで、直感的に捉えることができる。
しかし、グロタンディーク以前は誰ひとりとして気づかなかったことがある。
それは、有限体上の多様体（例えば有限体上の曲線など）という文脈に身をおくなら、われわれは関数を超えて、層を相手にできるということだ。
あるいはこうも言えるかもしれない。
関数は古い数学の概念であり、層は現代数学の概念である、と。
グロタンディークは、色々な意味において、層の方がより基本的だということを示した。
古き良き関数たちは、層の影に過ぎないのである。

【182】
この発見が刺激となって、20世紀の後半に数学は大きく発展することになった。

なぜなら層は、関数よりもはるかに重要で、幅広い状況に適用できる数学的対象であり、ずっと多くの構造を持つからだ。
例えば、ひとつの層がいくつもの対称変換を持つこともある。
関数を層に格上げすれば、それらの対称変換を利用して、関数を扱った場合よりも、はるかに多くの情報を得ることができるのだ。

層はロゼッタストーンをつなぐ

【183】
われわれにとって特に重要なのは、層は、ヴェイユのロゼッタストーンの真ん中と右側のコラムの両方に関係するということだ。
そのおかげで、ラングランズ・プログラムを真ん中から右側のコラムへと進めるための、ひとつの道が開けるのである。

ヴェイユのロゼッタストーン

数論	有限体上の曲線	リーマン面
ガロア群	ガロア群	基本群
保型関数	保型関数または保型層	保型層

【184】
ロゼッタストーンの右側のコラムでは、複素数上で定義された多様体を考える。
例えば、球面やドーナツの表面などのリーマン面がそれだ。
その場合、ヴェイユのロゼッタストーンの左側と真ん中のコラムに現れる保型関数は、あまり使い物にならない。
しかし層は使えるので、真ん中のコラムで関数を層で置き換えると（それができるのはグロタンディークの辞書のおかげだ）、ヴェイユのロゼッタストーンの真ん中と右側のコラムの間で、再びアナロジーが成り立つようになる。

【185】
以上の話をまとめておこう。
ヴェイユのロゼッタストーンの真ん中のコラムから右側のコラムに進むためには、ラングランズ・プログラムで想定される関係式の両辺を多少調節しなければならない。
なぜならリーマン面の幾何学には、ガロア群と保型関数に相当するものがないからだ。
まず、ガロア群に相当するものとして、第９章で説明したリーマン面の基本群を考える。
次に、グロタンディークの辞書を使って、保型関数の代わりに、それに似た性質を持つ層を考える。
そのような層のことを、保型層と呼ぶ。

上記の表には、ロゼッタストーンの三つのコラムを示した。
それぞれのコラムは二行になっており、それぞれのコラムのラングランズ対応に現れる数学的対象が示されている。

ラングランズ・プログラムに関係する仕事ができるかもしれない

【186】
次なる問題は、保型層をどのように構成するかだ。
実は、これはとても難しい問題なのである。
1980年代の初めにドリンフェルドが、最も簡単な場合について、保型層の構成方法を初めて提案した（その基礎になったのはピエール・ドリーニュの未発表の仕事だった）。
その数年後、ジェラール・ローモンが、ドリンフェルドのそのアイディアをさらに発展させた。

【187】
私がドリンフェルドに会ったとき、彼は保型層を構成する抜本的に新しい方法を思いついたところだと話してくれた。
しかし、彼の考える新しい構成法を使うためには、ある予想が成り立っている必要があった。
ドリンフェルドは、カッツ-ムーディー代数に関するフェイギンとの仕事から考えて、私がその予想を証明できるのではないかと考えたのである。
私には到底信じられなかった――どうすれば私の仕事が、ラングランズ・プログラムに役立つというのだろう？

【188】
ラングランズ・プログラムに関係する仕事ができるかもしれないとなって、私はこのプログラムについて、知り得ることは何でも知りたいと思った。
その春は、ハーバード大学のドリンフェルドの研究室にほとんど毎日のように通い、ラングランズ・プログラムに関する疑問を次々と投げかけ、彼は辛抱強くそれらに答えてくれた。
彼の方から、フェイギンと私の仕事について、彼の計画に関係する詳細を質問することもあった。
それ以外の時間は、ハーバードの図書館でラングランズ・プログラムに関係する資料を手当たり次第に読みあさった。

第15章　ひとつの架け橋をかける

博士論文は、リー群Gとラングランズ双対群（そうついぐん）$^L G$という異なる大陸に橋をかけることに関する仕事だった。それは私がモスクワで取り組んでいたカッツ-ムーディー代数を利用することによって可能になるのだった。

博士論文

【189】
実は私の博士論文は、1990年のうちに完成させた新しいプロジェクトに関するものだった。
そのきっかけとなったのは、その春、ラングランズ・プログラムについて交わしたドリンフェルドとの議論だった。
次の示すのは、そんな議論のひとこまを映画の脚本のように書いてみたものだ。

ドリンフェルド：志村-谷山-ヴェイユ予想は、“三次方程式”とモジュラー形式との間につながりがあると述べているわけだが、ラングランズはそこから大きく歩を進めた。
彼は、もっと一般的なつながりがあると考えた。
そのときモジュラー形式の役割を演じるのは、リー群の保型表現だ。

フレンケル：保型表現とは？

ドリンフェルド：（長い沈黙の後で）当面、その厳密な定義はあまり重要ではない。
いずれにせよ、そんなことは本を読めばわかるからね。
重要なのは、それがリー群Gの――例えば球面の回転群SO(3)の――表現だということだ。

フレンケル：わかりました。
それでその保型表現が、何とつながるというのです？

ドリンフェルド：そこが一番面白いところだ。
ラングランズは保型表現が、別のリー群のガロア群の表現とつながっているはずだと予想したんだ。

フレンケル：そうなんですか。
そのリー群というのは、初めのリー群Gとはまた別のものなのですね？

ドリンフェルド：そう。
ラングランズはそのリー群を、初めのリー群Gの双対群（そうついぐん）と呼んだ。

　ドリンフェルドは黒板に、^{L}Gという記号を書いた。

フレンケル：そのLは、ラングランズの頭文字のLですか？

ドリンフェルド：（かすかな笑みを浮かべて）実はラングランズのもともとの動機は、L関数と呼ばれているものを理解することだったんだ。
それで彼は、その群をL群と呼んだのだ。

フレンケル：これまでのところを理解できてるかどうか、確認させてください。
どのリー群Gに対しても、別のリー群^{L}Gが存在する。

そうですね？

ドリンフェルド：その通り。
そしてその群は、模式的に表せば、次のようなランズランズ対応の式に現れる。

　ドリンフェルドは黒板に次のような模式図を書いた。

<u>^{L}Gにおけるガロア群の表現</u>

↕

<u>群Gの保型表現</u>

フレンケル：よくわかりません。
少なくとも、今のところは。
少し簡単な例について質問させてください。
例えば、SO(3)のラングランズ双対群は何ですか？

ドリンフェルド：それなら簡単だ。
SO(3)の二重被覆だよ。
コップを手に持って腕を回すトリックを知っているかい？

フレンケル：コップのトリック？
ああ、思い出しました・・・

　次のシーン　　ハーバード大学院生のパーティー

　２０代の初めから半ばくらいの院生が十数人ほど集まって、ビールとワインを飲みながら、がやがややっている。フレンケルはある学生と話をしている。

学生：こうやるんですよ。

その学生はワインの入ったプラスチック製のコップを手に持ち、それを右手の手のひらに乗せた。
それから手のひらを回転させ始めた。
360度回転させたところでは、彼の腕はねじれている。
コップを上に向けて腕を回し、さらに360度回すと、何と！
コップは元の位置に戻っているではないか。

　ドリンフェルドの研究室に戻る

ドリンフェルト：このトリックが示しているように、ノントリビアルな群SO(3)上に閉じた経路があるのだが、この経路を二回まわるとトリビアルな経路になる。

フレンケル：なるほど。
初めの360度の回転では、腕はねじれてしまう。
それはSO(3)のノントリビアルな経路のようなものなのですね。
もう一度回転させれば腕はさらにねじれそうだけど、実は、二度目の回転は腕の捻りを解いてしまう。

ドリンフェルド：その通り。

フレンケル：これとラングランズの双対群とに、どんな関係があるんです？

ドリンフェルド：SO(3)のラングランズの双対群は、SO(3)の二重被覆なのだから・・・

フレンケル：つまり、SO(3)の各要素に対して、ラングランズの双対群の二つの要素が存在する。

ドリンフェルド：だからこの新しい群は、いかなるノントリビアルな閉じた経路もない。

フレンケル：ということは、ラングランズの双対群に移行するということは、この奇妙なねじれを避けるひとつの方法なのですね。

ドリンフェルド：その通り。
一見したところでは、小さな違いのように思えるが、実は大きな効果がある。
例えば、電子とクォークのような、物質の基本構成要素と、光子のように物質粒子の間で相互作用を運ぶ粒子とでは、振る舞いに違いがある。
多くの場合、二つの双対群の間に、一見してわかるつながりはない。

フレンケル：なぜ双対群がラングランズ対応に現れるのですか？
何だか魔法のような・・・

ドリンフェルド：それがよくわかっていないのだ。

全く違う大陸にもうひとりの自分がいる

【190】
ラングランズ双対群は、リー群に二つ一組の関係性を打ち立てる――任意のリー群のGに対し、ラングランズ双対群としてのリー群^{L}Gが存在し、^{L}Gの双対群はもとのGである。
ラングランズ・プログラムが二つの異質な数学的対象（一方は数論、他方は調和解析のもの）をつなぐだけでも驚かされるが、108ページの模式図に示したように、ラングランズ対応の両側に現れるのには、唖然とさせられる。

【191】

前に、ラングランズ・プログラムは、数学の世界の異なる大陸をつなぐものだと述べた。
それら二つの大陸を、ヨーロッパ大陸と北アメリカ大陸と考えてみよう。
ヨーロッパ大陸の住人ひとりひとりを、北アメリカ大陸に住む誰かに対応付け、逆に、北アメリカ大陸の住人ひとりひとりを、ヨーロッパ大陸に住む誰かに対応づける方法があるとしよう。
こうして対応づけられた二人の人物は、体重、身長、年齢といった特徴はすべてぴったり一致するのだが、ジェンダーだけが切り替わると仮定しよう。
男は女に、女は男になるのだ。
それと同じように、ラングランズ・プログラムで予想されるつながりのもと、そのラングランズ双対群が切り替わるのである。
実はこの切り替えは、ラングランズ・プログラムの最も不思議な側面なのだ。
双対群を記述するためのメカニズムはいくつかわかっているが、なぜそんなことが起こるのかは、今もわかっていない。
それがわかっていないことがひとつの動機となって、われわれはラングランズ・プログラムの考え方を、数学の他の分野に（ヴェイユのロゼッタストーンを使って）拡張し、量子物理学にさえ拡張しようとしている。
ラングランズの双対群が何になるのかを教えてくれる実例をもっといろいろ見つければ、なぜこんなことが起こるのか、それが何を意味するのかについて、さらなる手がかりが得られるのではないかと期待してのことだ。

【192】
当面、ヴェイユのロゼッタストーンの右側のコラムに注目しよう。
それはリーマン面に関するものだ。
前章で示したように（106ページの表を参照）、このコラムで演じられるバージョンのラングランズ対応では、登場人物のひとりは、リー群Gに付随する保型関数（または保型表現）に相当する「保型層」である。
その保型層は、リーマン面Xと群Gに接続した、一種の空間上で「生きている」。
その空間のことを、リーマン面X上のG束のモジュライ空間という。
ラングランズ対応の相方であるガロア群の役割を演じるのは、第９章で見たように、リーマン面の基本群である。
そうすると、幾何学的ラングランズ対応を模式的に示せば、次のようになるはずだ。

<u>^{L}GにおけるXの基本群の表現</u>

$\updownarrow$

<u>X上のG束のモジュライ空間上の保型層</u>

つまり、^{L}Gにおける基本群の表現それぞれに対し、何らかの保型層を付随させられるはずなのである。
ドリンフェルドは、それを付随させる方法について、抜本的に新しいアイディアを持っていた。

「そのつながりを、君ならつけられるのではないか？」

【193】

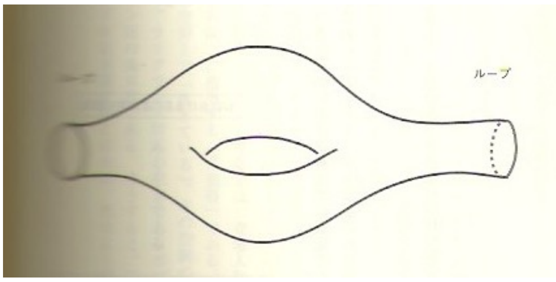
ドリンフェルドの研究室

ドリンフェルド：だから、保型層を作る系統的な方法を見つける必要がある。
実は、カッツ-ムーディー代数の表現で、それができるのではないかと思っているんだ。

フレンケル：なぜそう思うのですか？

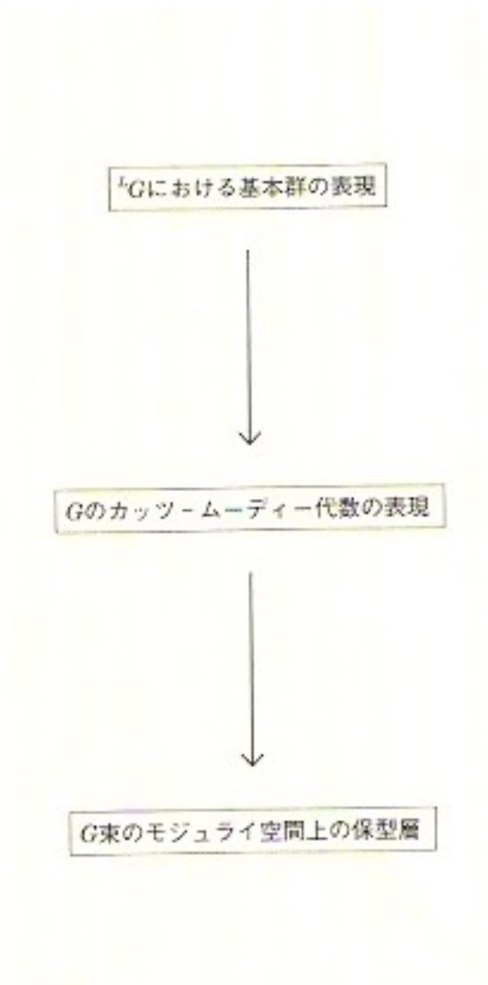
ドリンフェルド：われわれは今、リーマン面の世界にいる。
その面には、複数のループからなる境界があるかもしれない。

ドリンフェルドは黒板に次のような図を描いた。



ドリンフェルド：リーマン面上のループは、ループ群につながり、ループ群はさらに
カッツ-ムーディー代数につながる。
このつながりのおかげで、カッツ-ムーディー代数の表現を、われわれのリーマン面上のG
束のモジュライ空間上の束に変換することができる。
細かいところは、今は気にしないでおこう。
模式的には、こんな具合になるだろうと、私は予想している。

彼は黒板に次のような模式図を描いた。



ドリンフェルド：二つ目の矢印は、私には明らかに思われる。
本当の問題は、ひとつ目の矢印をどのように構成するかだ。
フェイギンは、カッツ-ムーディー代数の表現に関する君の仕事のことを話してくれた。
君ならその仕事の上に立ち、この矢印を構成できるのではないだろうか。

フレンケル：Gのカッツ-ムーディー代数の表現は、どういうわけか、ラングランズ双対群^{L}Gのことを「知っている」のですね。

ドリンフェルド：その通り。

フレンケル：なぜそんなことが？

ドリンフェルド：それが君が解くべき問題だ。

複素数を入れた微分方程式

【194】
この問題への私のアプローチについて話すためには、リーマン面の基本群の表現を非常にうまく構成できる方法について説明しなければならない。
そのためには微分方程式を用いる。
微分方程式というのは、ある関数を、その導関数（微分係数）と結びつける方程式である。

一例として、まっすぐな道を走っている車を考えよう。
その道にはひとつの座標がついている。
その座標を、xで表そう。
時刻tにおけるその車の位置は、関数x(t)によって表される。
例えば、$x(t)=t^2$ であるとしよう。
車の速度は、短い時間間隔Δtの間にその車が進んだ距離と、その時間間隔との比である。

$$x(t+\Delta t)-x(t)/\Delta t$$

もしもその車が一定速度で走っているなら、Δtをどう取ろうと関係がない。
しかし車が速度を変えるなら、Δtを小さく取る方が、時刻tにおける速度に対して、より良い近似が得られるだろう。
その時刻における速度の厳密な値を得るためには、Δtが０に近づいていくにつれて、この比の極限を求めなければならない。
その極限が、x(t)の導関数である。
それをx’(t)と書く。
例えば、$x(t)=t^2$なら、$x'(t)=2t$となる。
より一般的に、もしも$x(t)=t^n$なら、$x'(t)=nt^{n-1}$である。
これらの式を導くのは難しくないが、ここでの話にはあまり関係がない。

【195】
自然法則には、微分方程式として――つまり関数と、その導関数を含む方程式として――表されるものが多いようだ。
例えば、マクスウェル方程式は電磁現象を記述するものだが、微分方程式の形になっている。
また、重力を記述するアインシュタイン方程式も、やはり微分方程式だ。
実際、数学的なモデルの大多数は（物理学であれ、生物学であれ、化学であれ、金融市場であれ）、微分方程式の形になっている。
個人資産を運用しようとするときの最初の疑問、例えば複利計算はどうすればよいのか、といった疑問に答えようとすれば、すぐに微分方程式が出てくる。
例えば次の式は、微分方程式の一例である。

$$x'(t)=2x(t)/t$$

$x(t)=t^2$という関数は、この方程式のひとつの解である。
実際、$x'(t)=2t$で、$2x(t)/t=2t^2/t=2t$だから、この方程式の左辺と右辺に$x(t)=t^2$を代入すれば、どちらも2tになる。
さらに言えば、この方程式の解はすべて、$x(t)=Ct^2$の形になるのである。
ここでCは、tとは関係のない実数である（Cは定数constantを表す）.。
例えば$x(t)=5t^2$も解である。

$$x'(t)=nx(t)/t$$

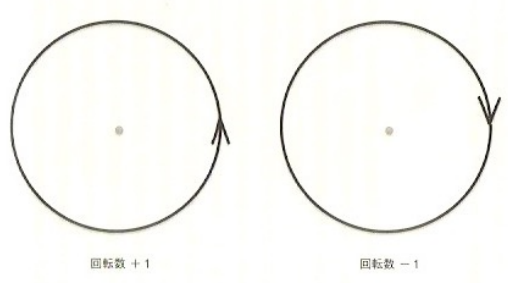
の解は、Cを任意の実数として、$x(t)=Ct^n$によって与えられる。

nが負の整数であっても一向に構わない。
方程式はそのまま通用するし、解を表す式$x(t)=Ct^n$もそのまま通用する。
ただし、t＝０では、この関数はもはや定義されない。
そこでt＝０という点は考えないことにしよう。
そうすれば、nは任意の有理数であってもよいし、さらに任意の実数であっても差し支えない。

さてここで、一歩先に歩を進めよう。
われわれは最初、微分方程式に現れるtを時間と見なしていたから、tは実数だということになっていたのだった。
しかしここで、tは複素数だと考えよう。
すると、rとsを実数として、tは $r+s\sqrt{-1}$ の形になる。
第９章で論じたように、複素数は平面上で rとsという座標を持つ点として表される。
tを複素数にすると、x(t)は、事実上、平面上の関数となる。
もう少し正確に言えば「平面から一点を差し引いたもの」の上で定義された関数である。
x(t)は点t＝０では定義されず、t＝０は平面上の原点なので（原点において、rとsはゼロになる）、確かにx(t)は平面から一点、すなわち原点を取り除いたものの上で定義されている。

【196】
次に、基本群に一役演じてもらおう。
第９章で論じたように、基本群の元は、閉じた経路である。
一点を取り除いた平面の基本群を考えよう。
このとき閉じた経路は全て、「回転数」というものを持っている。
回転数とは、閉じた経路が、取り除かれた点――今の場合は原点――のまわりを何回めぐるかを表す数である。
その経路が、反時計回りにめぐるなら、回転数には正の符号がつき、時計回りなら負の符号がつく。
＋１と-１の回転数を持つ閉じた経路を下に示す。

［図15-3］



取り除かれた点のまわりを螺旋状に二度まわったのち、自分自身と交差して出発点に戻る経路の回転数は、＋２または-２である。
もっと複雑な経路でも、これも同じことである。

さて、先ほどの微分方程式に戻ろう。

$x'(t)=nx(t)/t$

ここでnは任意の実数、t は、今では複素数の値をとる変数である。
この方程式は$x(t)=t^n$という解を持つ。
しかしちょっと意外なことに、もしもnが整数でなければ、平面上の閉じた経路に沿って出発点まで戻りながら解の値を見て行くと、ぐるりと一周したときに、経路の終点と始点とで、解の値は必ずしも同じである必要はないのだ。
値にある複素数が掛かるのである。
この場合、解は経路に沿って「モノドロミー」を被るという。
ぐるりと一周すると何かが変わるというのは、直観に反しているように聞こえるかもしれないし、自己矛盾ではないかと思うかもしれない。
しかしそれは、経路に沿って「ぐるりと一周する」という言葉の意味によるのだ。
元に戻るのは、あるひとつの「特性」――例えば、空間内での位置――だけなのかもしれない。
その他の属性は、変わってもおかしくはないのだ。

【197】
時間の中で閉じた経路の例を考えてみよう。
リックは、2010年３月14日に開かれたパーティーでイルザと出会い、一目で恋に落ちた。
やがてイルザも恋に落ちる。
時の流れは速く、一年経って、再び３月14日がめぐってきた。
われわれにとって重要なのは、カレンダー上は同じ３月14日に戻ったとは言え、二人のお互いに対する気持ちは変わっていてもおかしくはないということだ。
空間の中で閉じた経路の例を考えてみよう。
リックとイルザが世界一周の旅に出たとしよう。
旅行中、二人の関係にもいろいろあり、出発点――郷里の町――に戻ってきたときには、お互いに対する気持ちは変わっているかもしれない。

【198】
最初の例では、時間の中で閉じた経路（より具体的には、カレンダーの月日）を考え、二つ目の例では、空間の中で閉じた経路を考える。
しかし結論はどちらもよく似ている。
閉じた経路に沿って動くうちに、二人の関係が変わるかもしれないということだ。
どちらのシナリオも、愛の「分岐」とでも言うべきものが示されている。

【199】
数学的には、イルザに対するリックの愛情を xという数で、リックに対するイルザの愛情を yという数で表すことができる。
そうすると、各時刻における二人の関係は、平面上の、座標（x、y）を持つ点で表されるだろう。
例えば最初のシナリオでは、最初に出会った日には、二人の関係は（１、０）という点だった。

しかしその後、二人は閉じた経路（時間の中か、空間の中の経路）に沿って動き、点の位置は変化する。
こうして二人の関係の成り行きは、xy平面上の軌跡によって表されるのである。
この軌跡の始点と終点における違いが、「分岐」だ。

【200】
もうひとつの例をあげよう。
あなたは螺旋階段を上って、ぐるりとひとめぐりしたとしよう。
あなたの居場所を床に対して射影したものを見る限り、あなたはぐるりと円周をひとめぐりしている。
しかし、あなたの居場所の高さという、もうひとつの属性は変わっている。
あなたは次の階層に移動したのだ。
これもまた「分岐」のひとつである。
これと最初の例とを結びつけることができる。
なぜならカレンダーは螺旋に似ているからだ。
一年を構成する365日は、床の上に描かれた円周に相当し、年は高さに相当する。
従って、ある与えられた日付、例えば2010年3月14日から、一年後のその日付まで動くことは、螺旋階段を登るようなものなのだ。

【201】
先ほどの微分方程式の解に戻ろう。
平面上の閉じた経路は、螺旋階段上のあなたの居場所を、床に射影したときに生じる円周のようなものである。
それに対して解の値は、その階段上のあなたの高さに相当する。
こう考えれば、閉じた経路をぐるりとひとめぐりしたときの解の値が、初めの値と違っていたとしても驚くに当たらない。
これら二つの値――経路を一巡りするときの、始点と終点の値――の比をとると、この経路に沿った解のモノドロミーが得られる。

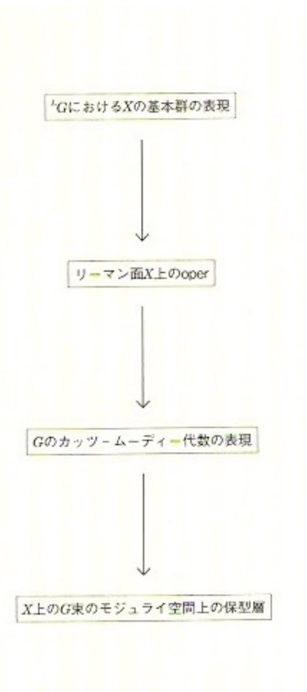
【202】
これまでの議論をまとめると、一点を省いた平面上の異なる経路に沿ったモノドロミーは、円周群の基本群のひとつの表現を与えるということだ。
より一般的に、任意のリーマン面（おそらくは、いまの例と同様、いくつかの点が取り除かれている）の基本群の表現を、その表面上で定義された微分方程式のモノドロミーを評価することによって構成することができる。
これらの方程式は複雑なものになるだろうが、しかし局所的には――つまり表面上の点の小さな近傍では――いずれも、今見たものとよく似たものになっている。
より洗練された方程式の解のモノドロミーを利用することにより、今見たものと同様の方法で、円周軍以外のリー群において、与えられたリーマン面の基本群の表現を構成することができる。
例えば、群SO(3)の場合に、基本群の表現を構成できる。

モノドロミーによってカッツ-ムーディー代数に近づく

【203】
私が直面していた問題に戻ろう。
リー群Gから出発して、対応するカッツ-ムーディー代数をとる。
ドリンフェルドの予想によれば、このカッツ-ムーディー代数とラングランズ双対群 ^LGにおける基本群の表現との間に、なんらかのつながりがあるはずだ。

最初のステップは、基本群の表現を、適切な微分方程式であって、そのモノドロミーが ^LGに値をとるようなもので置き換えることである。
これにより、問題はより代数的なものとなり、カッツ-ムーディー代数の世界に近づく。
ここで考えているような種類の微分方程式は、ドリンフェルドとソコロフによって導入されたものである（それは本質的に、先ほど述べた、一点を取り除いた平面のような場合に導入されたのだった）。
その後、ベイリンソンとドリンフェルドは、その仕事を任意のリーマン面に一般化し、結果として得られる微分方程式を「オーペル（opers）」と呼んだ。
この言葉は operator から導かれたものだが、ちょっとしたジョークもまじっている。
というのはロシア語では、警察官を意味するスラング［日本語では「おまわり」のようなもの］だからである。

【204】
私の博士論文は、ボーリャと一緒にモスクワでやった仕事の基礎の上に組み立てられたもので、私はその中で、ラングランズの双対群 ^LG に対応するオーペルによってパラメトライズされた（福永注：パラメータ表示された）、Gのカッツ-ムーディー代数の表現を構成することができた。
Gと^LGの間につながりが存在するということは、ほとんど奇跡のようなものだった。
ドリンフェルドが予想した通り、Gに付随するカッツ-ムーディー代数は、なぜかラングランズ双対群 ^LG のことを「知っていた」のだ。
このおかげで、彼の計画は、次のような枠組みに従って進むことになった。



この結果に対する私の証明は、専門的には非常に込み入ったものとなった。
私は、ラングランズ双対群が「どのように」現れるかを説明することはできたが、それから20年を経た今日に至るも、「なぜ」それが現れるのかはまだ謎に包まれている。
私は問題を解いたけれど、その答えがどこからか突然降ってわいたように感じられるというのでは、やはり納得がいかなかった。
それ以来、もっと完全な説明を得たいという思いが、私を研究に駆り立てる動機のひとつとなっている。

【205】
このようなことは決して珍しいことではない。
誰かがひとつの定理を証明すると、他の人たちがその証明が正しいことを確かめ、その成果の上に立って、その分野はさらに発展するが、その証明の意味が本当に理解されるまでには、それから何年も、何十年もかかる場合があるのだ。
たとえ私がその意味を見出すことができなかったとしても、たいまつは新しい世代の数学者たちに引き継がれ、いずれはその意味が理解されるだろう。
もちろん、私は自分自身の手で、それを理解したいと思っている。

【206】
ベイリンソンとドリンフェルドは、私が博士論文で証明した定理を利用して、幾何学的ラングランズ対応（ヴェイユのロゼッタストーンの右側のコラム）を見事に構成してのけた。
彼らの仕事は本当に素晴らしいもので、ラングランズ・プログラムの新章の始まりであり、みずみずしいアイディアと洞察をたくさん導入し、この主題を豊かに膨らませることになった。

【207】
私はその後、この分野で自分のやった研究のことを、ケンブリッジ大学出版会から出た『ループ群に対するラングランズ対応』（2007）にまとめた。

私は著書に収めたエピグラフのひとつとして、1931年に書かれたＥ・Ｅ・カミングズの詩から、次の部分を選んだ。

　透明な同心円状の幾何学は、かすかに
　身をくねらせながら、誇り高い内向きの代数の中を沈んでいく
　螺旋を描きながら、鉄の算術と衝突するために

私にはこれが、われわれがラングランズ・プログラムにおいてやろうとしていること――すなわち、幾何学、代数、算術（つまり数論）の統一 ――に対する、詩的なメタファーのように感じられるのである。
われわれは、現代における錬金術を成し遂げようとしているのだ。

【208】
ベイリンソンとドリンフェルドの仕事によって、長らく未解決だった問題のいくつかは解決されたが、そこからさらに多くの問題が生じた。
数学とはそういうものなのだ。
新しい結果が出るたびに、未知のものを被っているベールが引き上げられる。
しかしそうして得られた知識が、答えの全てではない――その知識には、それまで問うことさえ思い及ばずにいたいくつもの問いや、進むことができるとさえ知らずにいた、いくつもの進路への道しるべが含まれている。
そのため、発見がひとつ成し遂げられるたびに、われわれは新たな道に踏み出すことになる。
どんな発見がなされようと、それによって知識を求める思いが満たされることはないのだ。